OTTO-VON-GUERICKE-UNIVERSITÄT MAGDEBURG
Fakultät für Verfahrens- und Systemtechnik
Lehrstuhl für Systemverfahrenstechnik
Prof. Dr.-Ing. K. Sundmacher

Übung Systemverfahrenstechnik SS2013
1. Projektübung

Ausgabetermin: 24. April 2013
Abgabetermin: 08. Mai 2013

1. Allgemeines (27 P)

1.1 Indizierte Schreibweise (Tensornotation) (5,5 P)

Im Folgenden soll insbesondere die Verwendung der Summenkonvention geübt werden.

a) Schreibe folgenden Ausdruck aus: $\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 \quad i, j \in \{1,2,3\}$ (2 P)

b) Schreibe den Ausdruck $A_{jk} = \alpha\left(\frac{\partial b_j}{\partial c_k} - \frac{\partial b_k}{\partial c_j}\right)$, $j, k \in \{1,2,3\}$ als Matrix: (2 P)

c) Sei $a \in \mathbb{R}^{1\times m}$ (Zeilenvektor), $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (Matrix), $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (Spaltenvektor). Entscheide, ob folgende Ausdrücke definiert sind ("Sinn machen" bzw. "zulässig sind") und schreibe sie, falls ja, in der indizierten Schreibweise auf. Verwende die Summenkonvention um Platz zu sparen.(1,5 P)

(i) *aBc* = ________________________________ ,

(ii) *caB* = ________________________________ ,

(iii) *cBa* = ________________________________ .

1.2 Grundlagen der Modellierung (18,5 P)

a) Nenne drei Bilanzgleichungen für Erhaltungsgrößen: Welche thermodynamischen Zustandsfelder lassen sich aus den entsprechenden Bilanzgrößen ableiten? (3 P)

b) Nenne den Unterschied zwischen intensiven und extensiven Größen! Nenne jeweils ein Beispiel! (1,5 P)

c) Gib die Definitionsgleichung für die molare Schwerpunktsgeschwindigkeit v_k^{m} für ein System aus *N* Komponenten an. Zeige, dass die Summe aller molaren Diffusionsströme verschwindet. (2,5 P)

d) Wie lautet der allgemeine Quellen- und Senkenterm σ_α der Massenbilanz für ein Reaktionsnetzwerk? Gib die Einheiten der auftretenden Größen an. (2 P)

e) Welche Größen werden mit konstitutiven Gleichungen verknüpft? (1,5 P)

f) Worin besteht der Unterschied zwischen lokaler („Euler") und substantieller („Lagrange") Formulierung? Mit Hilfe welcher Gleichung können Bilanzen zwischen beiden Formulierungen transformiert werden? (2 P)

g) Gib in Form einer Wortgleichung die allgemeine Struktur einer Bilanzgleichung an. (1 P)

h) Ordne die folgenden Größen entsprechend zu: (5P)

	Extensiv	bilanzierbar	Echte Erhaltungsgröße	Zustandsgröße im Sinne der Thermo-(Fluid-)dynamik
(i) Geschwindigkeit v_j	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(ii) Gesamte Stoffmenge n	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(iii) Gesamtmasse m	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(iv) Temperatur T	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(v) Entropie S	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(vi) Impuls $p_j = m\ v_j$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(vii) Energiestromdichte q_j'	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(viii) Konzentration der Komp. A :c_A	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(ix) Masse der Komp. A :m_A	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(x) Reaktionsgeschwindigkeit r_m	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(xi) An einem Wärmeübertrager ausgetauschte Wärmemenge Q	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
(xii) Gesamtladung Q_{el}	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]

1.3 Mathematische Eigenschaften von Modellgleichungen (3 P)

Kreuze Zutreffendes an und und gib die Ordnung der Gleichung an.

	AE	ODE	PDE	Linear	Ordnung
a) $\tau \frac{\mathrm{d} c_A}{\mathrm{d} t} = (c_{A,in}(t) - c_A)$ c_A: <u>Gesuchte</u> Konzentration von A τ: Charakteristische Verweilzeit $c_{A,in}$(t): Zeitabhängige Konzentration von A im Zulauf t: Zeit	○	○	○	□	______
b) $p = \frac{R\ T}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2 - 2\mathrm{b}\mathrm{V}_m - b^2}$ V_m: <u>Gesuchtes</u> molares Volumen p: Druck a: Kohäsionsdruck b: Kovolumen R: Allgemeine Gaskonstante T: Absolute Temperatur	○	○	○	□	______

	AE	ODE	PDE	Linear	Ordnung
c) $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right)$ T: Gesuchte Temperatur ρ: Dichte c_p: spezifische Wärmekapazität λ: Wärmeleitfähigkeit t: Zeit z: Ortskoordinate	○	○	○	□	________

2. Bilanzierung (23 P)

Massenbilanz (16 P)

2.1 Die integrale Massenbilanz für eine Komponente α lautet

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} \mathrm{d}V = -\oint_{\partial\Omega} \rho_\alpha v_{k,\alpha} n_k \mathrm{d}A + \int_\Omega \sigma_\alpha \mathrm{d}V$$

a) Überführe diese in die lokale differentielle Form und kommentiere die Umformungsschritte. (2 P)

b) Gehe von der lokalen, eindimensionalen Massenbilanz einer Komponente α aus.

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}(\rho_\alpha v_\alpha) + \sigma_\alpha \qquad (1)$$

Führe die Massenschwerpunktsgeschwindigkeit v explizit in Gleichung (1) ein und benenne die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme. (3 P)

c) Überführe Gleichung (1) zunächst in die Konzentrationsform, führe die mittlere molare Schwerpunkts-geschwindigkeit v^m ein und überführe das Ergebnis wieder in die Form der Partialdichte. (3 P)

2.2 Leite eine Differentialgleichung zur Bestimmung des Partialdrucks der Komponente α her (lokale Formulierung, örtlich 3-dimensional). Lösungshinweis: Gehe hierzu von der Komponentenmassenbilanz aus. Überführe diese zunächst in eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Konzentration der Komponente α. Der Partialdruck wird anschließend über das ideale Gasgesetz berücksichtigt, wobei von einer konstanten Temperatur ausgegangen werden soll. Kommentiere sämtliche Umformungsschritte, sodass sie nach-vollziehbar sind! Beachte, dass bis auf die konstante Temperatur keine weiteren Annahmen getroffen werden dürfen. (3 P)

2.3 Überführe das Ergebnis aus 2.2 in die substantielle Formulierung. (2 P)

2.4 Leite eine Differentialgleichung zur Bestimmung des Partialdrucks der Komponente α her (lokale Formulierung, örtlich 3-dimensional). Abweichend von Aufgabe 2.2 soll nun berücksichtigt werden, dass die Temperatur keine konstante Größe ist, sondern von der Zeit und dem Ort abhängt ($T = T(t,z)$). Vereinfachend kann angenommen werden, dass Diffusion sowie chemische Reaktionen vernachlässigbar sind. Überführe die erhaltene Differentialgleichung abschließend in die substantielle Formulierung, sodass diese die Terme $\mathrm{d}p_\alpha/\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ enthält. (3 P)

Impulsbilanz (7 P)

2.4 Die Impulsbilanz in lokaler Formulierung lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_j) = -\frac{\partial}{\partial z_k}(\rho v_k v_j + P_{jk}) + \sum_\alpha \rho_\alpha f_{j,\alpha} \quad (2).$$

Ordne jedem Term eine physikalische Bedeutung zu! (2 P)

2.5 Wie vereinfacht sich die Besetzungsstruktur des Drucktensors P_{jk} für ein reibungsfreies Fluid? (1 P)

2.6 Wie vereinfacht sich der letzte Term aus Gleichung (2) für den Fall, dass Gravitation, die einizige angreifende Kraft ist? (1 P)

2.6 Aus der Impulsbilanz in lokaler Formulierung ist die Formel für den Schweredruck p(h) in einer stationären, ruhenden, inkompressiblen, reibungsfreien Flüssigkeit in Abhängigkeit von der Tauchtiefe h herzuleiten. An der Flüssigkeitsoberfläche h_0 herrscht Normaldruck p_0. Skizzieren sie das Problem. (3 P)