

SS 2013

Übung Systemverfahrenstechnik

2. Projektübung

Ausgabetermin: 22. Mai 2013

Abgabetermin: 5. Juni 2013

1. Allgemeines (14,5 P)

1.1 Finite-Volumen-Methode (FVM) (7 P)

- 1.1.1. Bei welcher Art von Differentialgleichung wird die FVM verwendet? (1 P)
- 1.1.2. Nennen Sie je zwei Vor- und Nachteile der FVM. (2 P)
- 1.1.3. Nennen Sie in wenigen Stichpunkten die Vorgehensweise bei der Anwendung der FVM. (3 P)
- 1.1.4. Nennen Sie zwei weitere numerische Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen (1 P).

1.2 Partielle Differentialgleichungen (7,5 P)

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen:

$$(I) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x, u) \qquad (II) \quad \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x)$$

$$(III) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(3u^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \qquad (IV) \quad -\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f(x_k) \quad \forall k \in \{1, 2\}$$

$$(V) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\beta}{2} \int_0^x u(t, \xi) u(t, x - \xi) d\xi - \beta u(t, x) \int_0^\infty u(t, \xi) d\xi$$

Dabei ist t die Zeitkoordinate, x bzw. x_k die Ortskoordinate(n), u die gesuchte Funktion, f eine beliebige (nichtlineare) Funktion der angegebenen Variable, α , β und c sind beliebige, positive Konstanten.

Klassifizieren Sie die Gleichungen nach ihrer Ordnung, bei Gleichungen 2. Ordnung machen Sie zusätzlich eine Aussage über deren Typ (elliptisch, parabolisch, hyperbolisch). Welche Gleichungen sind linear, welche nicht? Wie viele Anfangs- und Randbedingungen sind zur Lösung dieser Gleichungen nötig?

2. Energiebilanz (20 P)

Hintergrund – Radiofrequenzablation, auch Radiofrequenz-Thermoablation (RFTA) genannt, ist eine nicht-chirurgische, lokale Behandlungsmethode, bei der mit Hilfe von Hitze Tumorzellen abgetötet werden, wobei das umliegende, gesunde Gewebe verschont bleibt.

Bei diesem Verfahren führt der Radiologe eine kleine Nadel durch die Haut in den Tumor. Zusätzlich werden elektromagnetische Wellen ausgesandt. Die Nadel hat drei verschiedene Zonen: Base, Tip und Elektrode (siehe Abb. 1). Sie unterscheiden sich durch unterschiedliche Materialien. Das Elektrodenmaterial absorbiert elektromagnetische Strahlung. Die elektromagnetischen Wellen regen die Atome an der Oberfläche der Elektrode zu Schwingungen an, wodurch eine hohe Temperatur an der Elektrodenoberfläche entsteht. Wir nehmen an, dass lediglich an der Spitze der Nadel ($z_2 = Z_2$) elektromagnetische Energie in thermische Energie umgesetzt wird und hier die Temperatur T_q herrscht. Von der Spitze der Elektrode wird die absorbierte Wärme nun durch Fouriersche Wärmeleitung durch Elektrode, Tip und Base geleitet (siehe Abb. 1 und Abb. 2). Der Bereich Tip hat – wie die Elektrode – eine vergleichsweise hohe Wärmeleitfähigkeit, um hier lokal hohe Temperaturen zu erzeugen mit denen Tumorgewebe verbrannt werden kann. Der Bereich Base berührt hauptsächlich gesundes Gewebe und darf nicht stark erhitzt werden. Deshalb verwendet man hier Material, welches die Wärme schlecht leitet.

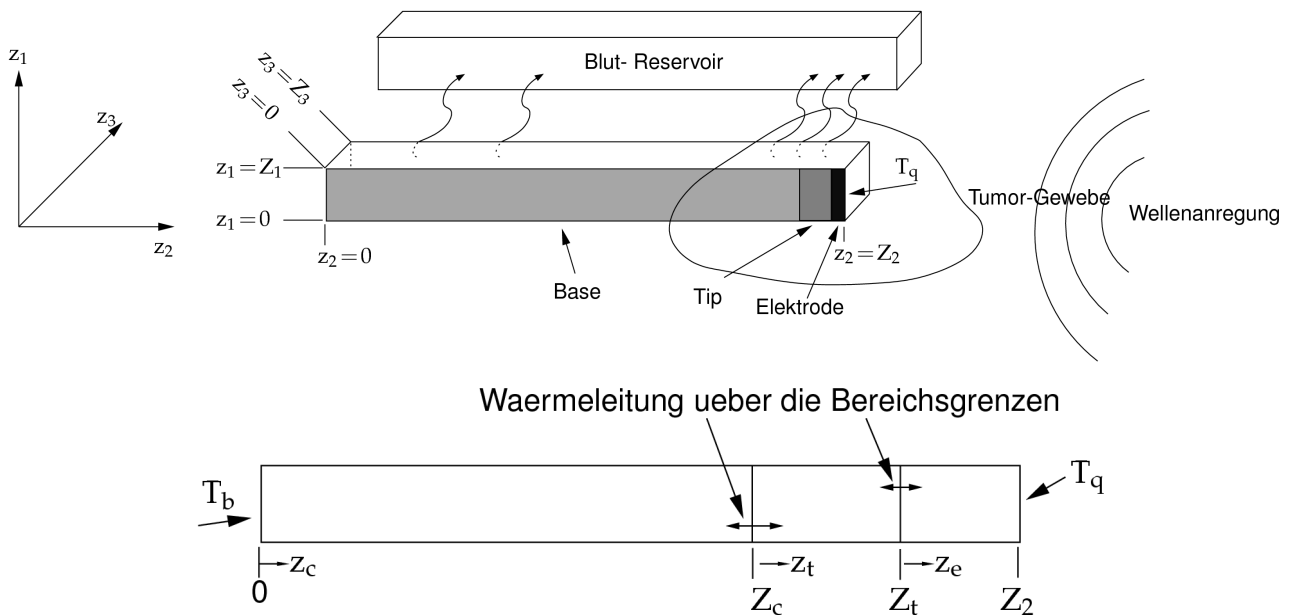


Abb. 1: Die Nadel wird an der Spitze (Z_2) durch elektromagnetische Wellen erhitzt auf T_q . Die Wärme wird durch unterschiedliche Bereiche der Nadel geleitet und an das angrenzende Blutreservoir abgegeben (oben). Die Nadel besteht aus unterschiedlichen Materialien, die die Wärme unterschiedlich gut leiten (unten).

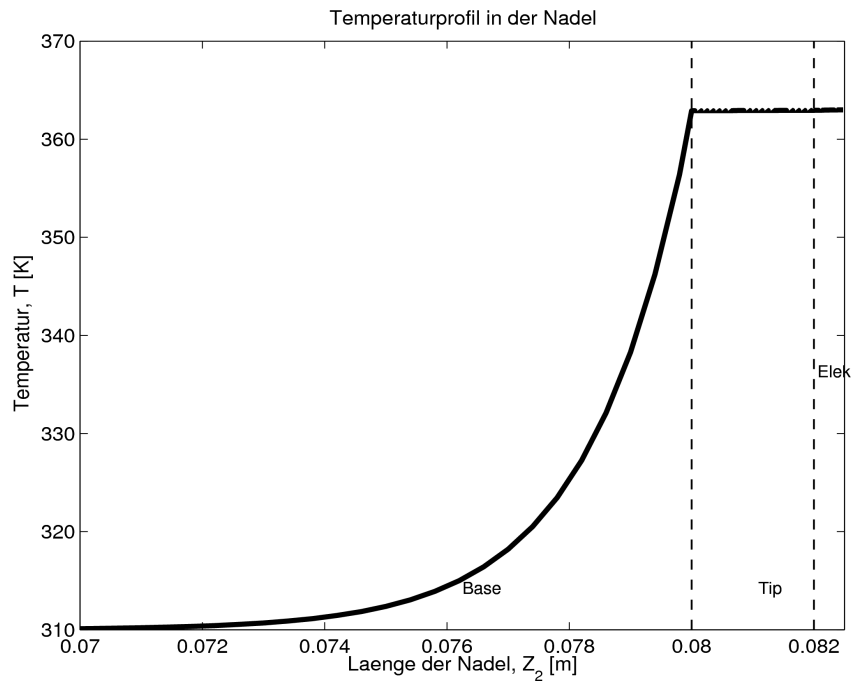


Abb. 2: Temperaturprofil in der Nadel ab $z_2 = 0,07\text{m}$ (links: Base, mittig: Tip, rechts: Elektrode)

Modellannahmen:

- (1) Die Nadel wird als langer Stab aufgefasst. Die Temperaturgradienten entlang der Koordinaten z_1 und z_3 sind gegenüber dem Gradienten entlang z_2 vernachlässigbar.
- (2) Volumenkräfte sind zu vernachlässigen.
- (3) Der Druck bleibt über Zeit und Ort konstant.
- (4) Konvektion spielt in der Nadel keine Rolle, da es sich um einen Feststoff handelt ($v = 0$). Allerdings wird über die gesamte Länge der Nadel ein Blutreservoir hinter der Nadel ($z_3 = Z_3$) berücksichtigt. In diesem wird das Blut bewegt, somit ständig ausgetauscht und behält eine konstante Temperatur T_b . Dadurch kommt es zu einem Wärmeaustausch zwischen Nadel und Blut, beschrieben durch:

$$q_3'(z_3 = Z_3) = -\alpha(T_b - T)$$

Der Rest der Nadel soll als ideal isoliert angesehen werden. Ein Austausch in z_1 -Richtung der Nadel und über die Vorderseite der Nadel ($z_3 = 0$) findet also nicht statt. An der Stelle $z_2 = 0$, also an der linken Seite der Nadel, soll Bluttemperatur T_b herrschen:

$$q_1'(z_1 = 0) = q_1'(z_1 = Z_1) = q_3'(z_3 = 0) = 0$$

- (5) In allen Bereichen der Nadel ist in z_2 -Richtung Fouriersche Wärmeleitung zu beachten. Der Wärmeleitkoeffizient λ ist dabei ortsunabhängig.

$$q_2' = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z_2}$$

- (6) Diffusionsströme sind vernachlässigbar.
- (7) Die Dichte in den einzelnen Teilen der Nadel ist konstant, ebenso die Dichte des Blutes.
- (8) Auf den Grenzen zwischen den Bereichen in der Nadel (Base/Tip und Tip/Elektrode) sind die Randbedingungen so zu wählen, dass die Wärmeströme auf den Grenzen von beiden Seiten gleich

groß sind. Der Wärmestrom aus dem einen Bereich muss also in den anderen übergehen.

- (9) Da kein Stoffstrom vorhanden ist, treten auch keine chemischen Reaktionen auf.

2.1 Modellierung – Entwicklung der Gleichung zur Berechnung des Temperaturfeldes in der Nadel (12 P)

- 2.1.1. Gehen Sie bei der Modellierung von der dreidimensionalen Bilanz der inneren Energie

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z_k}(\rho u v_k + q_k) + \sum_{\alpha} f_{k,\alpha} j_{k,\alpha} - P_{jk} \frac{\partial v_j}{\partial z_k}$$

aus. Anhand der Modellannahmen sind begründete Vereinfachungen vorzunehmen (3 P)

- 2.1.2. Überführen Sie die resultierende Gleichung in die Temperaturform. Durch die Modellannahmen können weitere Vereinfachungen vorgenommen werden. (*Hinweise: kanonische Zustandsgleichung, Operatorgleichung, totales Differential der Enthalpie*) (4 P)

- 2.1.3. Reduzieren Sie das Modell durch Integration über die Breite z_1 und die Tiefe z_3 der Nadel. Beachten Sie dabei die getroffenen Annahmen und setzen Sie nach der Reduktion den kinetischen Ansatz ein. Verwenden Sie anschließend für die verbliebene Koordinate die Bezeichnung $z \equiv z_2$. (5 P)

Beachte: Diese Gleichung wird nun auf die drei Bereiche Base (c), Tip (t) und Elektrode (e) angewandt. Im Folgenden arbeiten wir also mit den drei Gleichungen

$$\rho_j c_{p,j} \frac{\partial T_j}{\partial t} = \lambda_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial z_j^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_j) \quad \forall j \in \{c, t, e\}, \quad (\heartsuit)$$

wobei ρ_j , $c_{p,j}$, T_j und λ_j die Dichte, die Wärmekapazität, die Temperatur und die Wärmeleitfähigkeit in den einzelnen Bereichen darstellen. Für jeden Bereich gibt es nun eine eigene Ortskoordinate: $z_c \in [0, Z_c]$, $z_t \in [0, Z_t - Z_c]$ und $z_e \in [0, Z_2 - Z_t]$.

2.2 Aufstellen der Randbedingungen (8 P)

Die Übergänge zwischen den einzelnen Bereichen, sowie an $z = 0$ und $z = Z_2$, müssen gesondert mit Hilfe von Randbedingungen modelliert werden. Leiten Sie aus Annahme (8) die Temperaturen auf den Grenzen zwischen den Bereichen Base und Tip (T_{ct}), sowie Tip und Elektrode (T_{te}) ab.

3. Finite-Volumen-Methode (FVM) (22 P)

Diskretisierung – Die Indizierung der Elemente soll in jedem Bereich neu beginnen. Der Bereich Base hat also n_c , der Bereich Tip n_t und der Bereich Elektrode n_e Elemente. Die Nadel wird also mit insgesamt $n_c + n_t + n_e$ Elementen diskretisiert. Die Abstände zwischen den Stützstellen sollen in den einzelnen Bereichen z_c , z_t und z_e äquidistant sein. Sie seien bezeichnet mit $\Delta z_j \in \{\Delta z_c, \Delta z_t, \Delta z_e\}$. Beachten Sie, dass $\Delta z_c \neq \Delta z_t \neq \Delta z_e$. Diskretisieren Sie die repräsentative Gleichung (♥) mit Δz_j .

- 3.1 Diskretisieren Sie die in Aufg. 2.1 hergeleitete Differentialgleichung mit Hilfe der Methode der finiten Volumen. Benennen Sie die für die Diskretisierung der einzelnen Terme notwendigen Annahmen und Rechenregeln. Verwenden Sie ein äquidistantes Gitter und fertigen Sie eine beschriftete Skizze an. (12 P)
- 3.2 Nehmen Sie die Diskretisierung nun für die Grenzelemente der Base der Nadel unter Berücksichtigung der unter Aufg. 2.2 erarbeiteten Randbedingungen vor. (10 P)

4. Implementierung in Matlab (20 P)

- 4.1 Implementieren Sie das erhaltene System gewöhnlicher Differentialgleichungen in Matlab. Nutzen Sie aussagekräftige Variablenbezeichnungen und kommentieren Sie hinreichend (*Hinweis: Vergleichen Sie Ihre diskretisierten Gleichungen mit den im Anhang angegebenen*). (16 P)
- 4.2 Stellen Sie das stationäre Profil der Nadel dar und erläutern Sie das Profil hinsichtlich der Anwendung. (2 P)
- 4.3 Betrachten Sie das stationäre Profil der einzelnen Bereiche in getrennten Plots und erläutern Sie das Profil mit Blick auf die gewählten Randbedingungen. (1 P)
- 4.4 Welchen Einfluss hat der Austausch mit den Blutgefäßen? Betrachten Sie den Extremfall, dass kein Austausch stattfindet ($\alpha = 0$). (1 P)

Anhang A: Gegebene Größen

| | |
|-------------------------------|--|
| Dichte Base: | $\rho_c=70 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ |
| Dichte Tip: | $\rho_t=21500 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ |
| Dichte Elektrode: | $\rho_e=6450 \text{ [kg/m}^3\text{]}$ |
| Wärmekapazität Base: | $c_{p,c}=1045 \text{ [J/kg/K]}$ |
| Wärmekapazität Tip: | $c_{p,t}=132 \text{ [J/kg/K]}$ |
| Wärmekapazität Elektrode: | $c_{p,e}=840 \text{ [J/kg/K]}$ |
| Wärmeleitfähigkeit Base: | $\lambda_{p,c}=0.026 \text{ [W/m/K]}$ |
| Wärmeleitfähigkeit Tip: | $\lambda_{p,t}=72 \text{ [W/m/K]}$ |
| Wärmeleitfähigkeit Elektrode: | $\lambda_{p,e}=18 \text{ [W/m/K]}$ |
| Wärmeübergang Nadel/Gewebe: | $\alpha=10 \text{ [W/m}^2\text{/K]}$ |
| Bluttemperatur: | $T_b=310 \text{ [K]}$ |
| Temperatur am Elektrodenkopf: | $T_q=363 \text{ [K]}$ |
| Tiefe der Nadel: | $Z_3=0.001 \text{ [m]}$ |
| Breite der Nadel: | $Z_1=0.001 \text{ [m]}$ |
| Länge der Nadel: | $Z_2=0.0825 \text{ [m]}$ |
| Länge der Base: | $Z_c=0.08 \text{ [m]}$ |
| Länge des Tip: | $Z_t=0.002 \text{ [m]}$ |
| Länge der Elektrode: | $Z_e=0.0005 \text{ [m]}$ |
| Elemente Base: | $n_c=200$ |
| Elemente Tip: | $n_t=20$ |
| Elemente Elektrode: | $n_e=10$ |
| Anfangstemperatur Nadel | $T_0=310 \text{ [K]}$ |

Anhang B: Diskretisierte Gleichungen

BASE

erstes Element:
$$\frac{dT_{c,1}}{dt} = \frac{1}{\rho_c c_{p,c}} \left(\lambda_c \frac{T_{c,2} - 3T_{c,1} + 2T_b}{\Delta z_c^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{c,1}) \right)$$

innere Elemente $i=2:n_c-1$
$$\frac{dT_{c,i}}{dt} = \frac{1}{\rho_c c_{p,c}} \left(\lambda_c \frac{T_{c,i+1} - 2T_{c,i} + T_{c,i-1}}{\Delta z_c^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{c,i}) \right)$$

letztes Element n_c
$$\frac{dT_{c,n_c}}{dt} = \frac{1}{\rho_c c_{p,c}} \left(\lambda_c \frac{2T_{ct} - 3T_{c,n_c} + T_{c,n_c-1}}{\Delta z_c^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{c,n_c}) \right)$$

TIP

erstes Element:
$$\frac{dT_{t,1}}{dt} = \frac{1}{\rho_t c_{p,t}} \left(\lambda_t \frac{T_{t,2} - 3T_{t,1} + 2T_{ct}}{\Delta z_t^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{t,1}) \right)$$

innere Elemente $i=2:n_t-1$
$$\frac{dT_{t,i}}{dt} = \frac{1}{\rho_t c_{p,t}} \left(\lambda_t \frac{T_{t,i+1} - 2T_{t,i} + T_{t,i-1}}{\Delta z_t^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{t,i}) \right)$$

letztes Element n_t
$$\frac{dT_{t,n_t}}{dt} = \frac{1}{\rho_t c_{p,t}} \left(\lambda_t \frac{2T_{te} - 3T_{t,n_t} + T_{t,n_t-1}}{\Delta z_t^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{t,n_t}) \right)$$

ELEKTRODE

erstes Element:
$$\frac{dT_{e,1}}{dt} = \frac{1}{\rho_e c_{p,e}} \left(\lambda_e \frac{T_{e,2} - 3T_{e,1} + 2T_{te}}{\Delta z_e^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{e,1}) \right)$$

innere Elemente $i=2:n_e-1$
$$\frac{dT_{e,i}}{dt} = \frac{1}{\rho_e c_{p,e}} \left(\lambda_e \frac{T_{e,i+1} - 2T_{e,i} + T_{e,i-1}}{\Delta z_e^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{e,i}) \right)$$

letztes Element n_e
$$\frac{dT_{e,n_e}}{dt} = \frac{1}{\rho_e c_{p,e}} \left(\lambda_e \frac{2T_{te} - 3T_{e,n_e} + T_{e,n_e-1}}{\Delta z_e^2} + \frac{\alpha}{Z_3} (T_b - T_{e,n_e}) \right)$$

Sowie die Übergänge Base/Tip
$$T_{ct} = \frac{\frac{\lambda_t \Delta z_c}{\lambda_c \Delta z_t} T_{t,1} + T_{c,n_c}}{\left(1 + \frac{\lambda_t \Delta z_c}{\lambda_c \Delta z_t} \right)}$$

und Tip/Elektrode
$$T_{te} = \frac{\frac{\lambda_e \Delta z_t}{\lambda_t \Delta z_e} T_{e,1} + T_{t,n_t}}{\left(1 + \frac{\lambda_e \Delta z_t}{\lambda_t \Delta z_e} \right)}$$