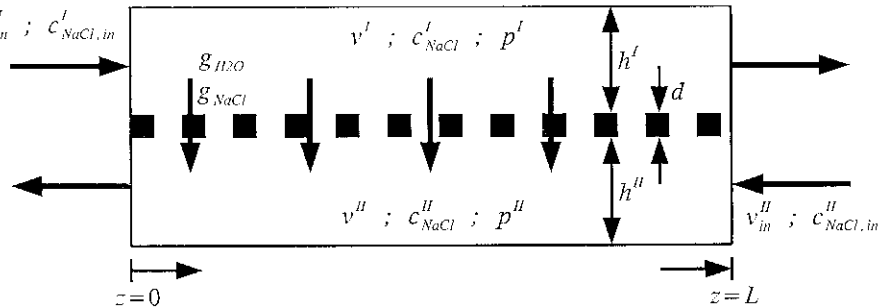




WS 2005/06
Systemverfahrenstechnik
2. Projektübung

Musterlösung

Um Meerwasser zu entsalzen und somit Trinkwasser zu gewinnen, wird der osmotische Effekt an Membranen genutzt. Hierzu werden zwei parallele Rohrreaktoren verwendet, die über eine Membran verbunden sind. Im idealen Fall läßt diese Membran zwar nur Wasser hindurch, im vorliegenden Fall soll jedoch auch Salztransport berücksichtigt werden.



Im Betrieb wird beiden Rohren Meerwasser mit einem natürlichen Salzgehalt zugegeben, und zwar im Gegenstrom. Zusätzlich wird eines der beiden Rohre (hier das obere, Index I) unter erheblichen Druck gesetzt. Der Stofftransport durch die Membran sei hier mittels Maxwell-Stefan-Ansatz beschrieben, wobei als treibende Kräfte die Gradienten des Druckes und des chemischen Potentials berücksichtigt werden. Die Reibung zwischen den beiden Stoffen Wasser und Salz sei gegenüber der Reibung dieser an der Membran vernachlässigbar. Der Apparat wird isotherm betrieben, ebenso ist jedes der beiden Rohre als isobar anzunehmen. Zu Anfang seien beide Rohre mit Meerwasser gefüllt.

Aufgabe 1

- 1.1 Stellen Sie geeignete Bilanzen auf, um die Konzentration des Salzes in beiden Rohren zu beschreiben. Nehmen Sie dazu beide Rohre als örtlich eindimensional an. Verwenden Sie darin die in der Skizze angedeutete Stoffaustauschdichte g . Berücksichtigen Sie ferner, daß bei dem seitlichen Stoffein- bzw. -austrag durch die Membran die Höhe der Kanäle eine Rolle spielt.
- 1.2 Um die Geschwindigkeitsprofile zu berechnen, wird zunächst eine Schließbedingung benötigt. In extensiven Größen gilt:

$$V = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \cdot v_{\alpha}^m \quad \text{mit } v_{\alpha}^m : \text{ molares Volumen der reinen Komponente } \alpha$$

Nehmen Sie eine ideale Mischung an (das ist zwar nicht wirklich korrekt, vereinfacht aber einiges ...), so daß die molaren Volumina als konstant angenommen werden können. Formen Sie diese in eine Schließbedingung in intensiven Größen um. Anschließend leiten Sie diese nach der Zeit ab, formen Sie so weit um, daß der Geschwindigkeitsgradient explizit beschrieben wird.

Benutzen Sie außerdem die Schließbedingung, um aus der Salzkonzentration die Wasserkonzentration zu berechnen.

1.3 Stellen Sie nun die Gleichungen für die Stoffaustauschdichten durch die Membran auf. Gehen Sie dazu von folgendem Ansatz gemäß Maxwell-Stefan aus:

$$-v_{\alpha}^m \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\mu, T} - \left(\frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial z} \right)_{p, T} = RT \cdot \frac{u_{\alpha}}{D_{\alpha, M}}$$

Formen Sie diesen kontinuierlich formulierten Ansatz in einen diskreten für die Membran um und setzen Sie die Konzentrationen in den beiden Kanälen ein. Formulieren Sie außerdem den Zusammenhang zwischen Teilchengeschwindigkeit u und der Stoffaustauschdichte g und Berücksichtigung der Porosität der Membran.

1.4 Was für ein System von Gleichungen liegt vor? Welche Anfangs- und Randbedingungen werden benötigt? Treffen Sie eine Aussage bezüglich der Linearität des Systems.

Aufgabe 2

2.1 Diskretisieren Sie die kontinuierlichen Gleichungen mittels der Finite-Volumen-Methode. Legen Sie diese anhand einer der Rohrgleichungen (Aufgabe 1.1) termweise detailliert dar, zu den restlichen Gleichungen genügt die Angabe des Ergebnisses für ein beliebiges mittleres Volumenelement und je ein Randelement, falls dieses gesondert behandelt werden muß.

2.2 Die Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeiten in den Rohren aus Aufgabe 1.2 kann verwendet werden, um die Stoffmengenbilanz aus Aufgabe 1.1 zu modifizieren. Das Ergebnis enthält einen gemischten Konvektionsterm, welcher ein Produkt aus Strömungsgeschwindigkeit und Konzentrationsgradient ist. Diskretisieren Sie diesen Term und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem, was Sie vom konvektiven Term einer Rührkesselbilanz erwarten. Welchen Schluß kann man daraus generell für die Formulierung kontinuierlicher Bilanzgleichungen ziehen?

2.3 Implementieren Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 2.1 in Matlab. Stellen Sie die Ergebnisse in geeigneter Form dar.

2.4 Was ist die treibende Kraft, die dafür verantwortlich ist, daß sich das Salz in einem der Rohre anreichert und in dem anderen abreichert? Wie weit könnte, ein unendlich langer Apparat mit idealer Membran vorausgesetzt, der Salzgehalt des Produktes bei dem gegebenen Druck sinken?

Gegebene Größen:

Rohre: $h^I = h^II = 0,1 \text{ mm}$ $L = 2 \text{ m}$ $p^I = 10^7 \text{ Pa}$ $p^II = 10^5 \text{ Pa}$
 Zuläufe: $v_{in}^I = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $v_{in}^{II} = 0,03 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $c_{NaCl, Meervasser} = 1000 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$
 Stoffe: $v_{H_2O}^m = 1/55555 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ $v_{NaCl}^m = 1/120000 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
 Diffusion: $D_{H_2O, M} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ $D_{NaCl, M} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
 Membran: $\varepsilon = 0.1$ $d = 100 \mu \text{ m}$
 Sonstige: $T = 293,15 \text{ K}$