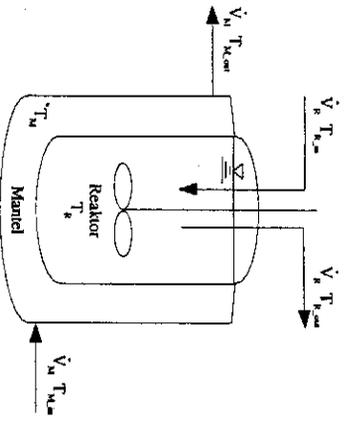




WS 2003/04

Systemverfahrenstechnik I
 3. Projektübung - Systemanalyse

Ausgabetermin 21.01.2004
 Abgabetermin 04.02.2004



Gegeben sei ein ideal durchmischter Rührkessel (CSTR) mit einem Heiz- bzw. Kühlmantel (auch dieser wird als Ideal durchmischrt betrachtet). Der Rührkessel dient im vorliegenden Fall zur der Aufheizung der Reaktanden für einen nachgeschalteten Prozess. Eine Reaktion findet nicht statt. Die Temperatur im Reaktor T_R kann nur über den Volumenstrom des Heizmediums kontrolliert werden. Der Volumenstrom des Reaktanden wird durch den nachfolgenden Prozess bestimmt und ist nicht veränderbar. Eine Volumenänderung aufgrund der Temperaturerhöhung ist zu vernachlässigen. Die Wärmekapazitäten und die Dichten können im untersuchten Temperaturbereich als konstant angenommen werden.

- Gegebene Größen:
- Zulaufertemperaturen: $T_{R,e} = 300 \text{ K}$; $T_{M,e} = 450 \text{ K}$
 - Volumeneinträge: $V_{R,e} = 1 \text{ m}^3$; $V_{M,e} = 0,1 \text{ m}^3$
 - Volumenströme: $V_R = 10 \text{ m}^3/\text{min}$; $V_M = 5 \text{ m}^3/\text{min}$
 - Stoffdaten: $\rho_{Reaktand} = 866 \text{ kg/m}^3$; $\rho_{Heizmedium} = 996 \text{ kg/m}^3$
 - Wärmedurchgangskoeffizient: $c_{p,Reaktand} = 1,717 \text{ kJ/kg K}$; $c_{p,Heizmedium} = 1,62 \text{ kJ/kg K}$
 - Wärmeaustauschfläche: $k = 1,345 \cdot 2,897 \cdot T_R^{1,3} \text{ W/m}^2 \text{K}^{2,5}$
 - $A = 3,1 \text{ m}^2$

1. Aufgabe (14 Punkte)

1.1 Identifiziere die Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen des gegebenen Systems und benenne einige Systemparameter. (2 P)

- 1.2 Stelle die interessierenden Bilanzgleichungen für dieses System auf und gehe dabei von der Annahme aus, dass kein Druckaufbau in den Bilanzräumen möglich ist. Um welche Art von Gleichungssystem handelt es sich? (4 P)
- 1.3 Implementiere und löse die dynamischen Gleichungen des Systems mit Hilfe von Matlab ($T_{R0} = 300 \text{ K}$, $T_{M0} = 450 \text{ K}$). Stelle die Ergebnisse in geeigneter Weise graphisch dar. (4 P)
- 1.4 Bestimme den stationären Zustand des Systems mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Werten. Wie sehen die Bilanzgleichungen in diesem Fall aus? (2 P)
- 1.5 Zur Optimierung eines nachfolgenden Prozesses sollen die Reaktanden kurzzeitig auf eine Temperatur von 350 K vorgeheizt werden. Welche Umsetzungsmöglichkeiten gibt es? Nütze das dynamische Modell des Systems zu Demonstrationszwecken! (2 P)

2. Aufgabe (16 Punkte)

- 2.1 Das System soll nun analysiert werden. Dazu empfiehlt sich zunächst eine Linearisierung. Wie ist dabei die allgemeine Vorgehensweise? Fertige eine Skizze an, die das Prinzip verdeutlicht und gehe dabei auch auf den Geltungsbereich einer Linearisierung ein. Warum linearisiert man und warum erfolgt dies üblicherweise um den stationären Punkt? (4 P)
- 2.2 Übertrübe das in Aufgabe 1 aufgestellte Gleichungssystem zum Zwecke der Linearisierung (um den stationären Punkt) in folgende allgemeine Form: $\dot{x} = f(x, u, t) \Rightarrow \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u$ mit $x = \bar{x} - \bar{x}$, und $u = \bar{u} - \bar{u}$. Berücksichtige dabei alle in der Systemskizze aufgeführten Eingangsgrößen. Wie bezeichnet man A, B, x und u üblicherweise und wie sind sie zusammengesetzt? Was fehlt noch zur vollständigen Beschreibung des linearisierten Systems in der Zustandsraumdarstellung? Gib den fehlenden Zusammenhang an und erläutere ihn. (4 P)
- 2.3 Berechne die konkreten Zahlenwerte der Elemente der Matrizen A und B unter Verwendung der in der Aufgabenstellung gegebenen Größen. (4 P)
- 2.4 Vergleiche das dynamische Verhalten des linearisierten und des nichtlinearisierten Modells, indem Du eine Eingangsgröße änderst. Stelle das Ergebnis graphisch dar und interpretiere es. (4 P)

3. Aufgabe (12 Punkte)

- 3.1 Das um den stationären Punkt linearisierte System soll nun auf Stabilität untersucht werden. Welche Stabilitätsdefinitionen (nenne mindestens 2) gibt es und was besagen diese? (3 P)
- 3.2 Folgende Eigenwerte seien bekannt:
 Fall a) $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$ und $\text{Im}(\lambda_1) = \text{Im}(\lambda_2) = 0$
 Fall b) $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) < 0$ und $\text{Im}(\lambda_1) = -\text{Im}(\lambda_2)$
 Fall c) $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ und $\text{Im}(\lambda_1) = -\text{Im}(\lambda_2)$
 Skizziere die entsprechenden Phasendiagramme (qualitativ) und stelle die Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene dar! Benenne die einzelnen Fälle (was ist im Phasendiagramm zu sehen?). (3 P)
- 3.3 Zeige, dass es sich bei dem untersuchten System um ein stabiles System handelt. Skizziere das Phasendiagramm und zeichne die charakteristischen Trajektorien sowie den stationären Punkt ein. Füge weitere Trajektorien (qualitativ) hinzu. Was ist hierbei zu beachten? (2 P)
- 3.4 Erstelle das Phasendiagramm für das untersuchte System (nutze die nichtlinearen Gleichungen). Wähle dafür beliebige Startwerte (ca. 8-10), sodass ein gut ausgebildeter Knoten erkennbar wird. Zeichne die charakteristischen Trajektorien ein und kommentiere das Phasendiagramm. (4 P)

Systemverfahrenstechnik
3. Projektübung

Florian Knorn

4. Februar 2004

Aufgabe 1

- 1.1) Alle Variablennamen und Formelzeichen werden aus der Aufgabenstellung bzw. aus dem Skript direkt übernommen und werden somit nicht näher erklärt. In dem vorliegenden System sind

- Eingangsgrößen: $\dot{V}_M(t)$, $T_{M,in}$, sowie für Aufg. 2.2 $\dot{V}_R(t)$, $T_{R,in}$
- Zustandsgrößen: T_R , T_M ,
- Ausgangsgrößen: T_R , T_M (auf Grund der idealen Durchmischung),
- Systemparameter: V_R , V_M , c_p , k , A , ...

- 1.2) Da von konstantem Volumen des Reaktanden im Reaktor ausgegangen werden kann und keine Reaktionen stattfinden, werden keine Massenbilanzen benötigt (die Änderung der Gesamtmasse ist null). Somit bleiben nur zwei Energiebilanzen für Reaktor und Kühlmantel aufzustellen.

Beide Systeme ähneln sich auf Grund der getroffenen Annahmen sehr stark, somit seien hier die notwendigen "Manipulationen" zunächst nur an einer Gleichung durchgeführt (später wird spezieller auf die beiden Systeme eingegangen).

Wegen der idealen Durchmischung kann direkt die integrale Enthalpiebilanz aufgestellt werden:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H}_{in} - \dot{H}_{out} + V \frac{dp}{dt} + q$$

Bei gegenüber den anderen Termen vernachlässigbar kleiner Änderung des Druckes und idealer Durchmischung ($H_{out} = H$) vereinfacht sich die Bilanzen zu:

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H}_{in} - \dot{H} + q$$

Wird angenommen, dass c_p nur linear von der Temperatur abhängt, gilt

$$H = m \cdot h = V \rho \cdot h \approx V \rho \cdot (h^\theta + c_p(T - T^\theta))$$

Setzt man diese Beziehung in die Bilanz ein (nur h und T hängen von der Zeit ab), folgt

$$V \rho \cdot c_p \frac{dT}{dt} = \dot{V} \rho \cdot (h^\theta + c_p(T_{in} - T^\theta)) - \dot{V} \rho \cdot (h^\theta + c_p(T - T^\theta)) + q$$

Die "Bezugsterme" heben sich auf, und somit vereinfacht sich die Bilanz weiter zu:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\dot{V}}{V} (T_{in} - T) + \frac{q}{V \cdot \rho \cdot c_p}$$

Im speziellen lauten somit die dynamischen Gleichungen für die Temperaturen unter Verwendung des Modells $q = k \cdot A \cdot (T_M - T_R)$, wobei $k = 1.345 + 2.897 \cdot T_R^{1.5}$ nichtlinear:

$$\boxed{\frac{dT_R}{dt} = \frac{\dot{V}_R}{V_R} (T_{R,in} - T_R) + \frac{kA}{V_R \rho_R c_{p,R}} (T_M - T_R)} \quad (1)$$

sowie

$$\boxed{\frac{dT_M}{dt} = \frac{\dot{V}_M}{V_M} (T_{M,in} - T_M) - \frac{kA}{V_M \rho_M c_{p,M}} (T_M - T_R)} \quad (2)$$

Es handelt sich hierbei um ein zweidimensionales System von gewöhnlichen, nichtlinearen, nichtautonomen, gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die zugehörigen Anfangsbedingungen (aus Aufgabe 1.3 entnommen) lauten

$$T_R(t = 0) = T_{R,0} = 300 \text{ K}$$

$$T_M(t = 0) = T_{M,0} = 450 \text{ K}$$

- 1.3) Das zur Lösung der Aufgabe verwendete *Matlab*-Programm befindet sich im Anhang an dieses Dokument. Es liefert die in Abb. 1 dargestellten Ergebnisse.

Auf Grund der Temperaturdifferenz tritt ein positiver Wärmestrom von Mantel zu Reaktor auf. Dadurch kühlt sich das im Mantel befindliche Heizmittel ab, und der Reaktand wärmt sich auf. Da sich dadurch die Temperaturdifferenz reduziert, fällt auch der Wärmestrom sukzessiv ab, bis ein Gleichgewicht (auch bestimmt durch die verschiedenen Wärmeein- und Austräge durch die ein- und ausströmenden Flüssigkeiten) zwischen treibender Kraft (Temperaturdifferenz) und Widerstand (u.a. durch den Wärmedurchgangskoeffizient dargestellt) einstellt: die Temperaturen und der Wärmestrom "erreichen" ihre stationären Werte.

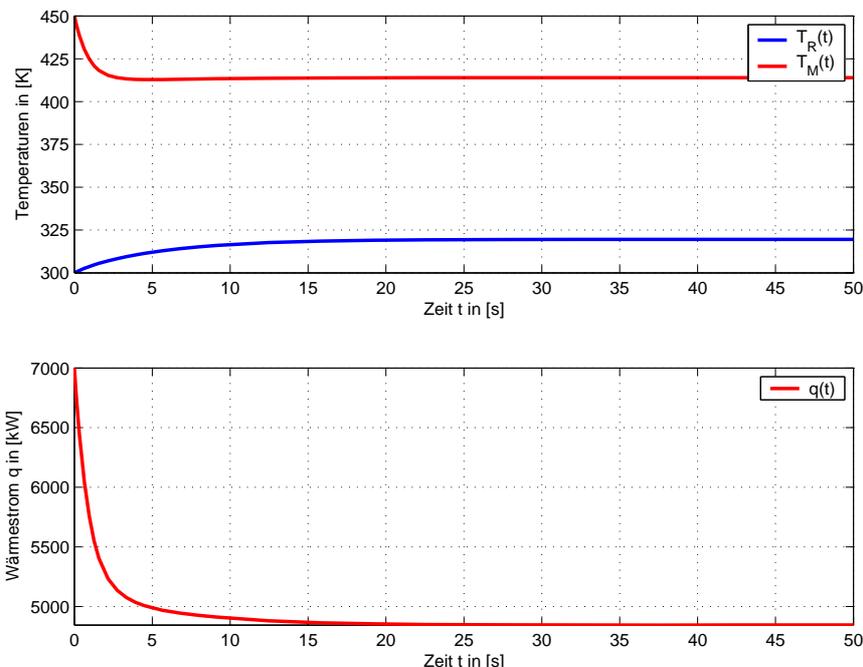


Abbildung 1: Reaktor- und Manteltemperatur, Wärmestrom von Mantel zu Reaktor

- 1.4) *Stationärer Zustand* bedeutet keine zeitliche Änderung mehr, was "zu null setzen" der Differentialgleichungen (1) und (2) gleich kommt:

$$0 = \frac{\dot{V}_R}{V_R}(T_{R,\text{in}} - T_{R,s}) + \frac{kA}{V_R \rho_R c_{p,R}}(T_{M,s} - T_{R,s}) \quad (3a)$$

$$0 = \frac{\dot{V}_M}{V_M}(T_{M,\text{in}} - T_{M,s}) - \frac{kA}{V_M \rho_M c_{p,M}}(T_{M,s} - T_{R,s}) \quad (3b)$$

wobei $k = 1.345 + 2.897 \cdot T_{R,s}^{1.5}$ ist. Somit kann man eine algebraische Beziehung für $T_{R,s}$ und $T_{M,s}$ aufstellen (2 nichtlineare Gleichungen, 2 Unbekannte). Auf die analytische Lösung sei hier verzichtet, in dem *Matlab*-Programm wird die Lösung numerisch bestimmt. Sie beträgt:

$$T_{R,s} = 319.55 \text{ K}$$

sowie

$$T_{M,s} = 413.97 \text{ K}$$

In diesem Fall ist $q_s = 4406.71 \text{ kW}$.

- 1.5) Hat man \dot{V}_M als einzige Eingriffsmöglichkeit in das System, so ist es *nicht* möglich, die gewünschte Reaktandentemperatur von $T_{R,s} = 350 \text{ K}$ zu erreichen. Man kann den Volumenstrom beliebig hochdrehen — auf Grund des gewissen (konstanten) Wärmeübertragungswiderstands kann dieser Widerstand nicht ohne Änderung von $T_{M,\text{in}}$ "überwunden" werden, so dass sich $T_{R,s} = 350 \text{ K}$ einstellt.

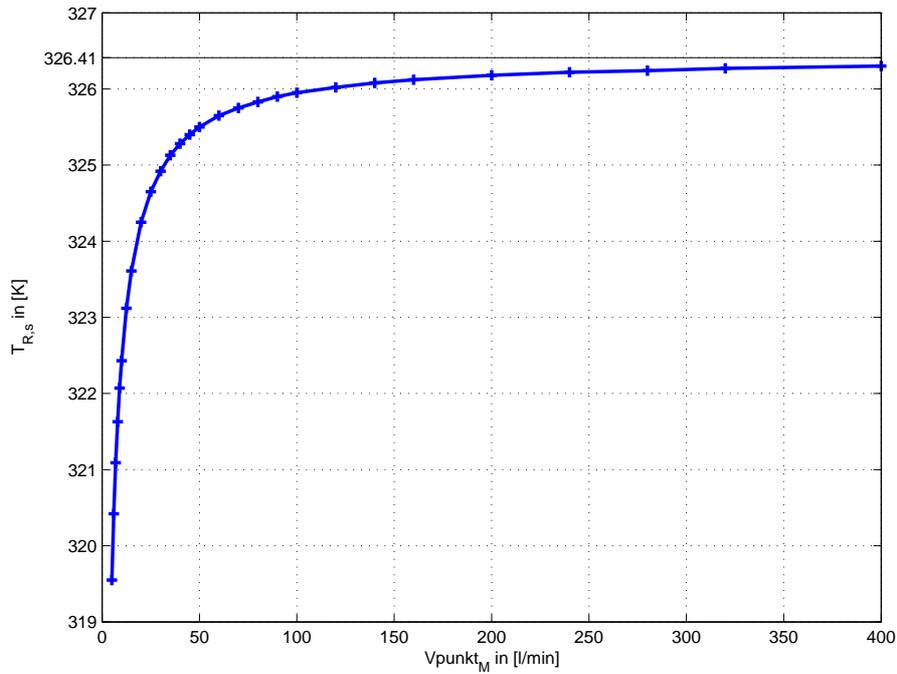


Abbildung 2: $T_{R,s} = f(\dot{V}_M)$ bei $T_{M,in} = 450$ K

Die Abhängigkeit des stationären Werts der Reaktantentemperatur vom Volumenstrom des Heizmittels bei konstanter $T_{M,in} = 450$ K ist für ein paar aus der Simulation “manuell” bestimmte Werte in Abb. 2 dargestellt. Tatsächlich könnte man auch einen (algebraischen) Zusammenhang $T_{R,s} = f(\dot{V}_M)$ aus den *steady-state*-Bedingungen (3) herleiten. Er würde die analytische Beschreibung des Kurvenverlaufs liefern.

Es lässt sich also zeigen, dass die Temperatur des Reaktanden asymptotisch gegen einen Wert von nur etwa 326.41 K strebt, bei ausreichender Erhöhung des Heizmittelvolumenstroms.

Somit kann $T_{R,s} = 350$ K offensichtlich nicht durch alleiniges Vergrößern von \dot{V}_M erreicht werden.

Könnte man z.B. den Volumenstrom auf Grund der Rohrleitungen maximal nur vervierfachen ($\dot{V}_M = 20$ m³/min), jedoch die Temperatur des Heizmittels beliebig einstellen, so müsste man Heizmittel mit der Temperatur von etwa 584 K einspeisen, um die gewünschten $T_{R,s} = 350$ K zu erreichen.

Aufgabe 2

2.1) Ist ein System von (nichtlinearen) Differentialgleichungen ersten Grades gegeben¹, wird dies im Allgemeinen, wenn möglich, um einen (oder mehrere) seiner stationären Zustände linearisiert, da sich zum einen lineare Systeme besser analysieren lassen (für lineare Systeme existieren viele geschlossene und umfangreiche Theorien), und zum anderen können Berechnungen und z.B. Reglerentwürfe leichter und schneller durchgeführt werden.

Die wichtigsten Eigenschaften wie Stabilität einer Ruhelage oder qualitatives Verhalten der Lösungen in der Nähe einer Ruhelage übertragen sich im Allgemeinen vom nichtlinearen System in das linearisierte, sodass unter gewissen Bedingungen wie begrenztem Gültigkeitsbereich (bei vorgegebener Toleranz) und den Vorgaben des *Hartman–Grobman–Theorems*² Aussagen über das linearisierte System auch für das nichtlineare gelten.

Bei der Linearisierung wird das zumeist nichtlineare Verhalten der rechten Seite einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen in einem Punkt durch eine lineare Approximation (vgl. Abb. 3) ersetzt. Man benutzt dazu die Taylorreihenentwicklung um einen stationären Punkt, bricht diese jedoch nach dem linearen Term ab. Deshalb hat das linearisierte System nur einen (z.T. stark) begrenzten Gültigkeitsbereich.

Man wählt dabei einen stationären Zustand, da ein solcher Punkt (auf Grund von Planung, Konstruktion, etc.) oft dem gewünschten Arbeitspunkt entspricht und man davon ausgeht, dass das System sich normalerweise nicht allzu weit von ihm entfernt (bzw. entfernen *sollte*). Außerdem nimmt die Linearisierung in diesem Falle eine besonders einfache Form an (s.u.).

Die meisten MIMO–Systeme³ lassen sich durch geeignete Umformungen in der Form

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad (4a)$$

$$y = g(x(t), u(t)) \quad (4b)$$

darstellen, wobei für die rechten Seiten $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, n Zustandsgrößen, m Eingangsgrößen, und $g: U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^r$, r Ausgangsgrößen, gilt. Setze

$$\xi(t) := x(t) - x_s, \quad \mu(t) := u(t) - u_s, \quad \nu(t) := y(t) - y_s$$

wobei der Index s jeweils den stationären Wert an einer (gleichen) Ruhelage kennzeichnet. Unter Verwendung der Taylorreihenentwicklung kann man (4a) überführen in:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \dot{x}(t) \\ \dots &= f(x(t), u(t)) \\ \dots &= f(x_s + \xi(t), u_s + \mu(t)) \\ \dots &= f(x_s, u_s) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_s, u_s} \xi(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x_s, u_s} \mu(t) + \text{h.o.t.} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \dot{y}(t) - y_s \\ \dots &= g(x(t), u(t)) - y_s \\ \dots &= g(x_s + \xi(t), u_s + \mu(t)) - y_s \\ \dots &= g(x_s, u_s) - y_s + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x_s, u_s} \xi(t) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{x_s, u_s} \mu(t) + \text{h.o.t.} \end{aligned}$$

Vernachlässigt man die Terme höherer Ordnung und nutzt aus, dass am stationären Punkt gerade $f(x_s, u_s) = 0$ und $g(x_s, u_s) = y_s$ ist, folgt schließlich

$$\dot{\xi}(t) = A(x_s, u_s)\xi(t) + B(x_s, u_s)\mu(t) \quad (5a)$$

$$\nu(t) = C(x_s, u_s)\xi(t) + D(x_s, u_s)\mu(t) \quad (5b)$$

Diese Darstellung entspricht nun der um den stationären Punkt linearisierten Form des ursprünglich nichtlinearen Systems (4).

¹Ist dies nicht der Fall, so kann man durch geeignete Transformationen / Umformungen ein System höherer Ordnung auf ein höherdimensionales System erster Ordnung überführen.

²Eigenschaften des lin. Systems nur dann für das nichtlineare aussagekräftig, wenn bei keinem Eigenwert der Systemmatrix am stationären Punkt der Realteil verschwindet

³Multiple Input, Multiple Output

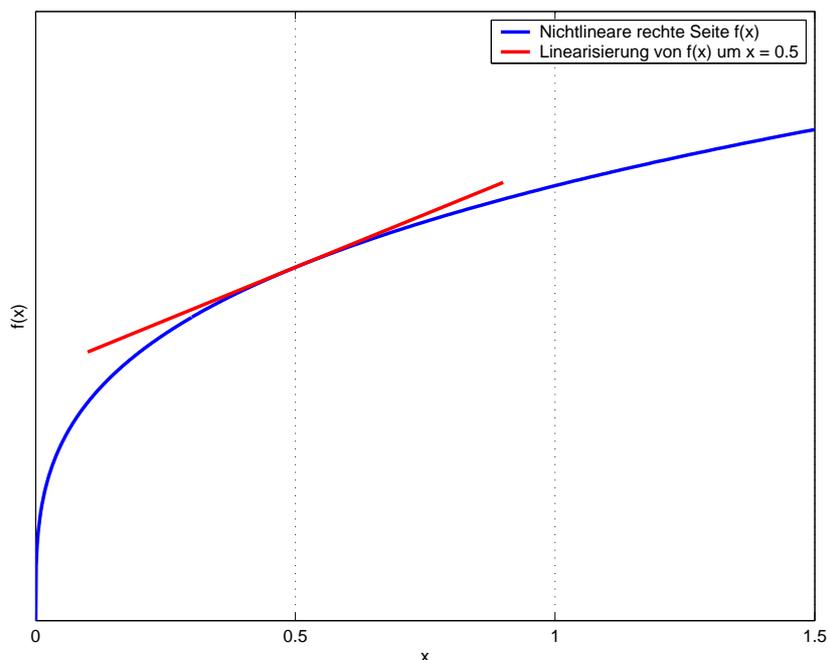


Abbildung 3: Skizze einer Linearisierung (eindimensionaler Fall)

2.2) Die in Aufgabe 1.2 bestimmten Gleichungen (1) und (2) kann man in eine vektorielle Gleichung umschreiben:

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_R \\ \dot{T}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{V}_R}{V_R}(T_{R,\text{in}} - T_R) + \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_R^{1.5})A}{V_R \rho_R c_{p,R}}(T_M - T_R) \\ \frac{\dot{V}_M}{V_M}(T_{M,\text{in}} - T_M) - \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_R^{1.5})A}{V_M \rho_M c_{p,M}}(T_M - T_R) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Mit

$$\tilde{x} := (T_R \quad T_M)^T$$

dem neuen *Zustandsvektor* und

$$\tilde{u} = (T_{R,\text{in}} \quad \dot{V}_R \quad T_{M,\text{in}} \quad \dot{V}_M)^T$$

dem neuen *Eingangsgrößenvektor* lässt sich (6) nun umschreiben in:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} f_1(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \\ f_2(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \end{pmatrix} := f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) \quad (7)$$

Diese Gleichung kann man nun wie in Aufgabe 2.1 beschrieben linearisieren. Man setze also zunächst:

$$x(t) := \tilde{x}(t) - \tilde{x}_s, \quad u(t) := \tilde{u}(t) - \tilde{u}_s$$

So ergibt sich⁴ für die $(n \times n) = (2 \times 2)$ *System-* oder *Dynamik-Matrix* A :

$$A(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\tilde{x}_s, \tilde{u}_s} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

⁴beachte: $\tilde{u}_s = \tilde{u}$, da man von konstanten Eingangssignalen ausgeht, also $\dot{V}_{R,s} = \dot{V}_R$ usw.

$$A_{11} = -\frac{\dot{V}_R}{V_R} + \frac{4.3455 \cdot \sqrt{T_{R,s}} \cdot A \cdot (T_{M,s} - T_{R,s})}{V_R \rho_R c_{p,R}} - \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_{R,s}^{1.5}) \cdot A}{V_R \rho_R c_{p,R}}$$

$$A_{12} = \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_{R,s}^{1.5}) \cdot A}{V_R \rho_R c_{p,R}}$$

$$A_{21} = -\frac{\dot{V}_M}{V_M} - \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_{R,s}^{1.5}) \cdot A}{V_M \rho_M c_{p,M}}$$

$$A_{22} = -\frac{4.3455 \cdot \sqrt{T_{R,s}} \cdot A \cdot (T_{M,s} - T_{R,s})}{V_M \rho_M c_{p,M}} + \frac{(1.345 + 2.897 \cdot T_{R,s}^{1.5}) \cdot A}{V_M \rho_M c_{p,M}}$$

Für die $(n \times m) = (2 \times 4)$ Eingangsmatrix B folgt:

$$B(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s) = \left. \frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right|_{\tilde{x}_s, \tilde{u}_s} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \frac{\dot{V}_R}{V_R}, \quad B_{12} = \frac{T_{R,in} - T_{R,s}}{V_R}, \quad B_{13} = 0, \quad B_{14} = 0,$$

$$B_{23} = \frac{\dot{V}_M}{V_M}, \quad B_{24} = \frac{T_{M,in} - T_{M,s}}{V_M}, \quad B_{21} = 0, \quad B_{22} = 0$$

Somit ist Gleichung (5a) gegeben. Zur vollständigen Beschreibung des linearisierten Modells in der Zustandsraumdarstellung (5) fehlen also noch Gleichung (5b) und die Anfangsbedingungen.

Im hiesigen Fall ist Ersteres trivial, da, auf Grund der idealen Durchmischung, die Ausgangsgrößen gleich den Zustandsgrößen sind (d.h. die $r \times n = 2 \times 2$ Ausgangsmatrix ist gleich der Einheitsmatrix) und auf Grund der Systemeigenschaften die Eingangsgrößen nicht unmittelbar auf die Ausgänge wirken (d.h. die $r \times m = 2 \times 4$ Durchgriffsmatrix ist gleich der Nullmatrix):

$$C(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s) = \text{id}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(\tilde{x}_s, \tilde{u}_s) = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die zugehörigen Anfangsbedingungen (wieder aus Aufgabe 1.3 entnommen) lauten

$$x(t=0) = x_0 = (300 \text{ K} \quad 450 \text{ K})^T$$

- 2.3) Die konkreten Zahlenwerte für Dynamik-, Eingangs-, Ausgangs- und Durchgriffsmatrix an der aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Werten folgenden Ruhelage (vgl. Aufgabe 1.4) betragen (siehe auch Ausgabe des *Matlab*-Programms):

$$A = \begin{bmatrix} -0.1859 & 0.0345 \\ 0.1770 & -1.1513 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.1667 & -19.5477 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8333 & 360.2797 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 2.4) Um das dynamische Verhalten beider Systeme vergleichen zu können, simulieren wir eine sprunghafte Änderung einer der Eingangsgrößen (\dot{V}_M). Es wird sich dabei der in Aufgabe 2.1 angesprochene Hinweis auf den begrenzten Gültigkeitsbereich der Linearisierung bestätigen.

Bei verhältnismäßig kleiner Änderung des Heizmittelvolumenstroms von fünf auf vier Kubikmeter pro Minute, vgl. Abb. 4, stimmen die Modelle noch ziemlich gut überein, sowie hinsichtlich der Dynamik als auch des stationären Werts.

Simuliert man jedoch eine signifikante Änderung, wie z.B. den Ausfall der Umwälzpumpe des Heizmittelkreislaufs ($\dot{V}_M = 0 \text{ m}^3/\text{min}$), so liefert das lineare Modell gänzlich unbrauchbare Ergebnisse, vgl. Abb. 5:

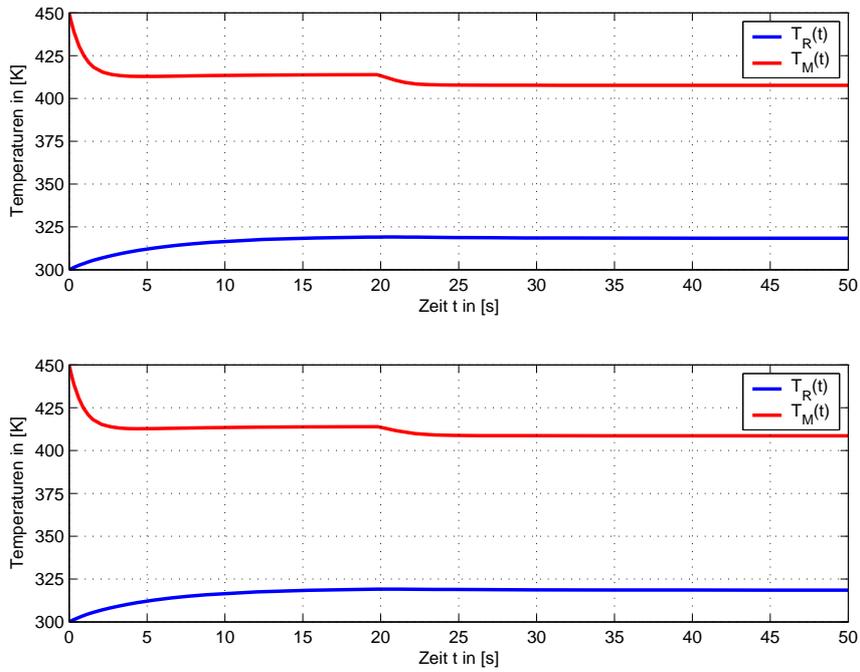


Abbildung 4: Vergleich nichtlineares / lineares System, kleiner Sprung

Wie erwartet sollten Reaktor- und Manteltemperatur gegen 300 K streben (allmähliche “Temperaturangleichung” zwischen dem im Mantel stillstehenden Heizmittel und dem weiterhin den Reaktor durchströmenden 300 K warmen Reaktanden). Das nichtlineare Modell (oberer Plot) liefert genau dieses Ergebnis, das linearisierte System (unterer Plot) zeigt hingegen unsinnige stationäre Werte für beide Temperaturen.⁵

Das Problem hierfür liegt vor allem daran, dass an dem sich neu einstellenden stationären Punkt die System- und Eingangsmatrizen nicht mehr gültig sind. Sie müssten für die neue “Situation” neu bestimmt werden.

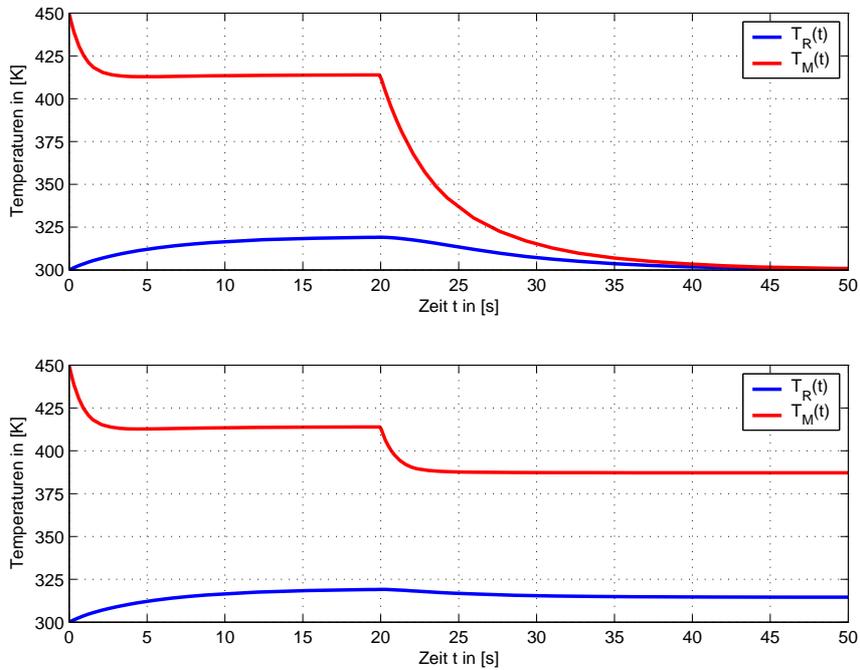


Abbildung 5: Vergleich nichtlineares / lineares System, großer Sprung

⁵Vorsicht ist also geboten im Umgang mit linearisierten Systemen!

Aufgabe 3

3.1) In der Systemanalyse gibt es mehrere Stabilitätsdefinitionen. Betrachtet man z.B. ein lineares System, so kann man von Überlegungen von *A. M. Ljapunov* aus seiner Habilitationsschrift 1892 ausgehen, die eine der wichtigsten Definitionen in der Stabilitätstheorie hervorgebracht hat. Aus den Überlegungen folgt u.a., dass Systeme des Typs $\dot{x}(t) = Ax(t)$

genau dann stabil sind, wenn die zu jedem beliebigen Anfangswert $x(t_0) = x_0$ gehörige Lösung in positiver Zeitrichtung gegen den Nullvektor konvergiert.

Wichtig ist zu bemerken, dass ab dem Zeitpunkt t_0 kein äußerer Eingriff mehr vorliegt, da Stabilität im Sinne von Ljapunov eine Eigenschaft des *unangeregten* Systems ist. Somit wird der Teil $B\mu(t)$ des Systems (5) (bzw. in der allgemeinen Schreibweise $Bu(t)$) nicht betrachtet, man geht nur von einer *Anfangsauslenkung* aus (die durch die Anfangsbedingung gegeben ist).

Neben dieser qualitativen Aussage kann man bei linearen, autonomen Systemen des Typs $\dot{x}(t) = Ax(t)$ (eben einer der Vorteile der Linearisierung) auch eine quantitative Aussage treffen: es lässt sich zeigen, dass das System genau dann (strikt) stabil ist, wenn die Eigenwerte der Dynamikmatrix A negativen Realteil haben. Besitzen diese nur nichtnegative Realteile, so spricht man von Grenz- bzw. Instabilität. Hier sieht man, dass diese Aussagen ausschließlich von den Eigenwerten der Systemmatrix abhängen, nicht jedoch von der konkreten Anfangsbedingung.

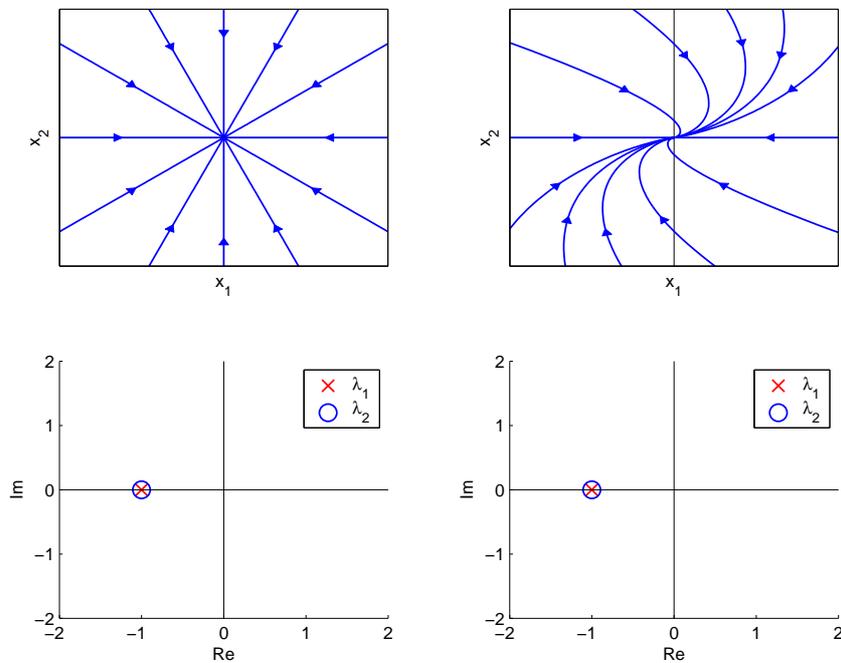


Abbildung 6: Phasenportraits für den Fall (a)

Geht man jedoch von einem dynamischen System als Übertragungsstrecke aus, interessiert sich also gerade für seine Reaktion auf Änderungen der Eingangsgrößen, so benutzt man meist die sog. *BIBO-Stabilität*⁶. Sie besagt,

eine Übertragungsstrecke ist dann stabil, wenn bei einer beliebigen — aber endlichen — Änderung des Eingangs (endlicher Sprung) ihr Ausgang für $t \rightarrow +\infty$ gegen einen endlichen Wert konvergiert.

Wir werden sehen, dass das hier behandelte System beiden Stabilitätsdefinitionen genügt.

3.2) In allen drei Fällen sei der Koordinatenursprung die stabile Ruhelage (die triviale Lösung) eines linearen, zweidimensionalen System. Die hier gezeigten Phasenportraits wurden mit

⁶Bounded Input, Bounded Output

Hilfe der jeweiligen Jordan'schen Normalform der Systemmatrix A gezeichnet. Wäre dies nicht der Fall, würden die Bilder trotzdem qualitativ gleich aussehen — sie wären lediglich "proportional" um die Ruhelage verzerrt. Die Werte der Eigenwerte sind exemplarisch gewählt.

Für die einzelnen Fälle gilt:

- (a) Abb. 6: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Auf der linken Seite ist ein stabiler *viel-tangentiger Knoten* (oder auch *Fokus* oder *degenerierter Knoten* genannt) dargestellt. Hier handelt es sich — im Unterschied zur rechten Abbildung (stabiler *ein-tangentiger* oder auch *unechter* oder *uneigentlicher Knoten*) — um einen halbeinfachen⁷ Eigenwert λ , d.h. zu dem doppelten Eigenwert gehören zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Auf der rechten Seite ist dies nicht der Fall und die Trajektorien schmiegen sich alle an die einzige Eigenrichtung $(1 \ 0)^T$ an.
- (b) Abb. 7: In beiden Fällen handelt es sich hier um einen stabilen *Strudel*, wobei auf der linken Seite $\text{Im}(\lambda_1) = 1,5 > 0$ ist, auf der rechten Seite $\text{Im}(\lambda_1) = -1,5 < 0$, was wie in (c) ausschlaggebend für die Drehrichtung der "Gebilde" ist.
- (c) Abb. 8: Die zwei Skizzen zeigen einen sog. *Wirbel* (oder auch *Zentrum*), wobei genau wie in (b) links $\text{Im}(\lambda_1) > 0$ und rechts $\text{Im}(\lambda_1) < 0$ ist.

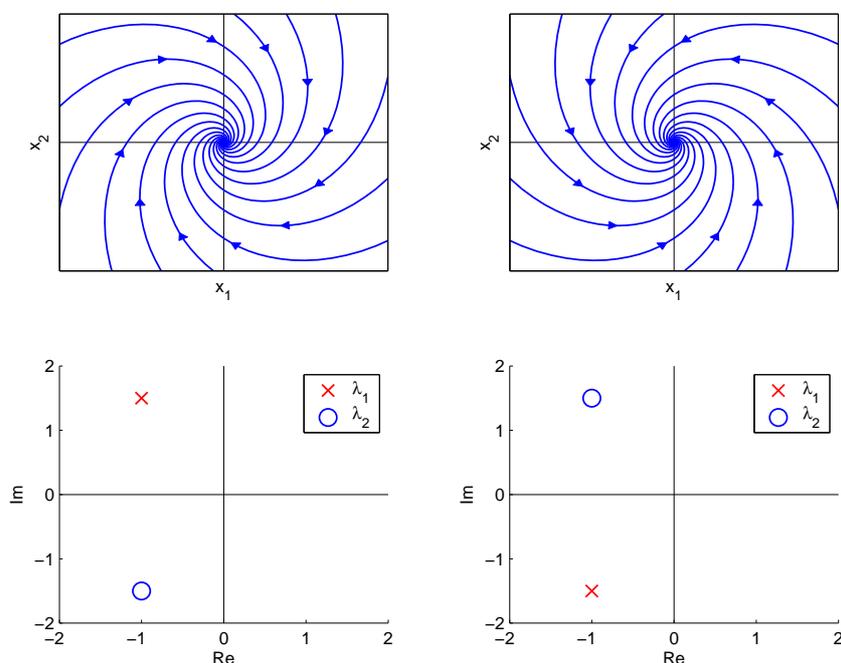


Abbildung 7: Phasenportraits für den Fall (b)

3.3) Wie in Aufgabe 2.1 angesprochen lassen sich u.a. qualitative Stabilitätsaussagen anhand des linearen Modells treffen. Die Dynamikmatrix hat hier an der in Aufgabe 1.4 genannten Ruhelage die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -0.1796, \quad \lambda_2 = -1.1576$$

Die beiden *reellen* Eigenwerte sind offensichtlich *negativ* und *verschieden*. Somit wird es sich bei dem Phasenportrait um einen *stabilen (echten) Knoten* handeln.

Die zu den Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren lauten respektive

$$\nu_1 = (0.9838 \ 0.1792)^T, \quad \nu_2 = (-0.0355 \ 0.9994)^T$$

Da der zum ersten Eigenwert gehörige Eigenvektor etwa horizontale Richtung besitzt und sein Eigenwert kleiner ist als der zweite (mit etwa vertikalem Eigenvektor), wird der Knoten sich in eher vertikaler Richtung "aufgabeln".

⁷algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwerts stimmen überein

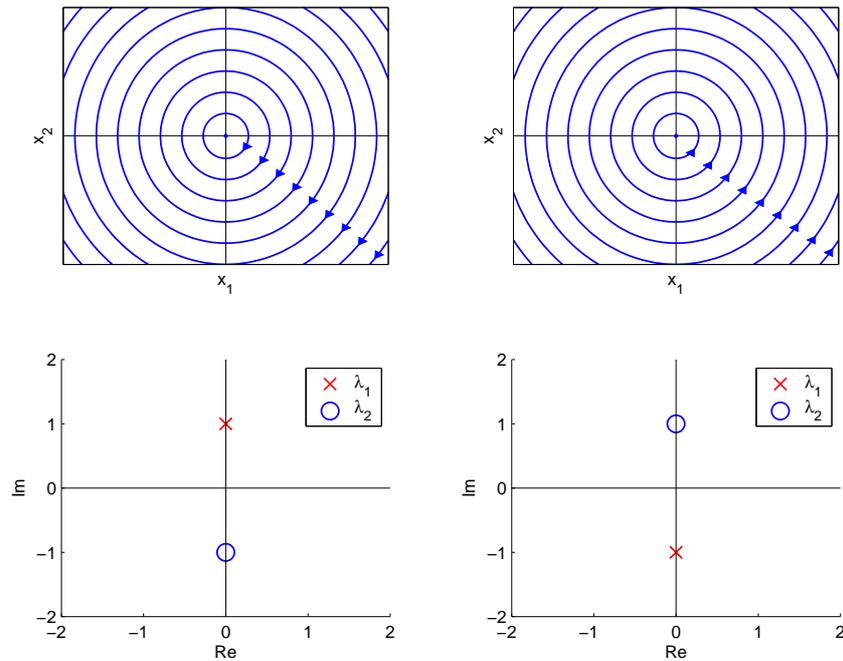


Abbildung 8: Phasenportraits für den Fall (c)

Abb. 9 zeigt das Phasendiagramm des linearisierten Systems und bestätigt die getroffenen Überlegungen. Die rot geplotteten Trajektorien entsprechen dabei den *charakteristischen Trajektorien* mit der Eigenschaft, dass sie (im Phasendiagramm des linearen Systems) Geraden sind und entlang der Eigenrichtungen des Systems laufen.

- 3.4) Die Überlegungen aus der vorigen Aufgabe als auch die allgemeinen Aussagen aus Aufgabe 2.1 spiegeln sich nun im Phasenportrait des nichtlinearen Systems wider (Abb. 10).

Die blauen Trajektorien sind hierbei wieder “normale” Trajektorien, die von geeigneten Anfangsbedingungen aus laufen, um die Struktur des Knotens sichtbar zu machen.

Bei der grünen Trajektorie handelt es sich um die Trajektorie, die von den in Aufgabe 1.3 gegebenen Anfangswerten “startet”.

Die roten Trajektorien entsprechen den charakteristischen Trajektorien — sie sind bei genauerem hinschauen keine Geraden mehr, da hier das nichtlineare System betrachtet wird.

Wie erwartet werden in der Nähe des stationären Punkts (hellblauer Punkt) die beiden Phasendiagramme quasi deckungsgleich.

Den verbleibenden Platz dieser Seite möchte ich nutzen, um Richard Hanke und Frank Rauscher, den geduldigen Übungsleitern der Vorlesung Systemverfahrenstechnik, zu danken.

Ich hoffe, das Semester hat Euch mindestens genauso viel Spaß gemacht, wie uns (abgesehen von den teilweise sehr zeitintensiven Projektübungen ...).

Vielen Dank für den Umgang mit Matlab und die vielen interessanten Dinge, die Ihr uns beigebracht habt.

Viel Erfolg für die Zukunft !!!

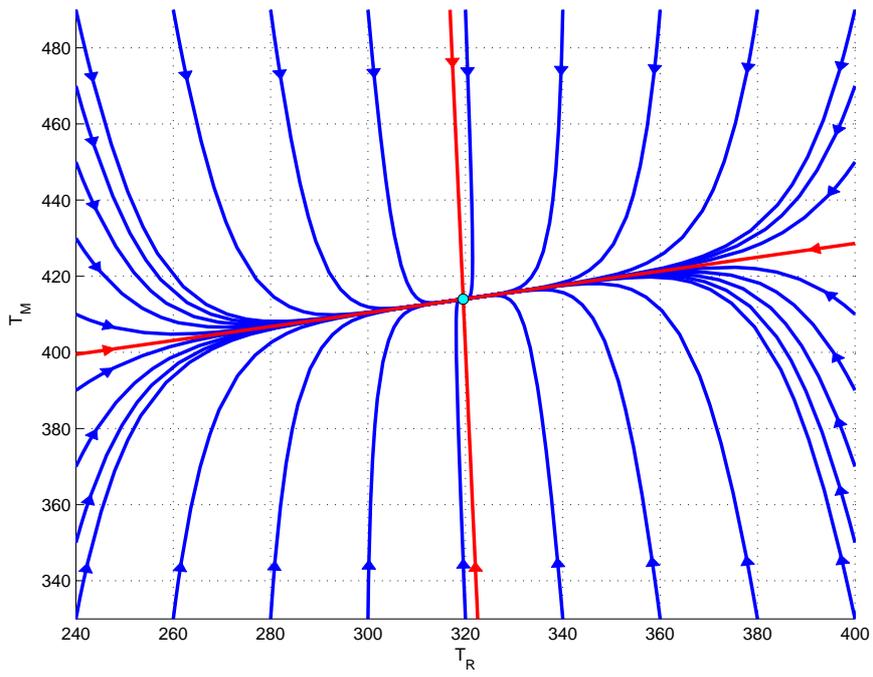


Abbildung 9: Phasenportrait des *linearen* Systems

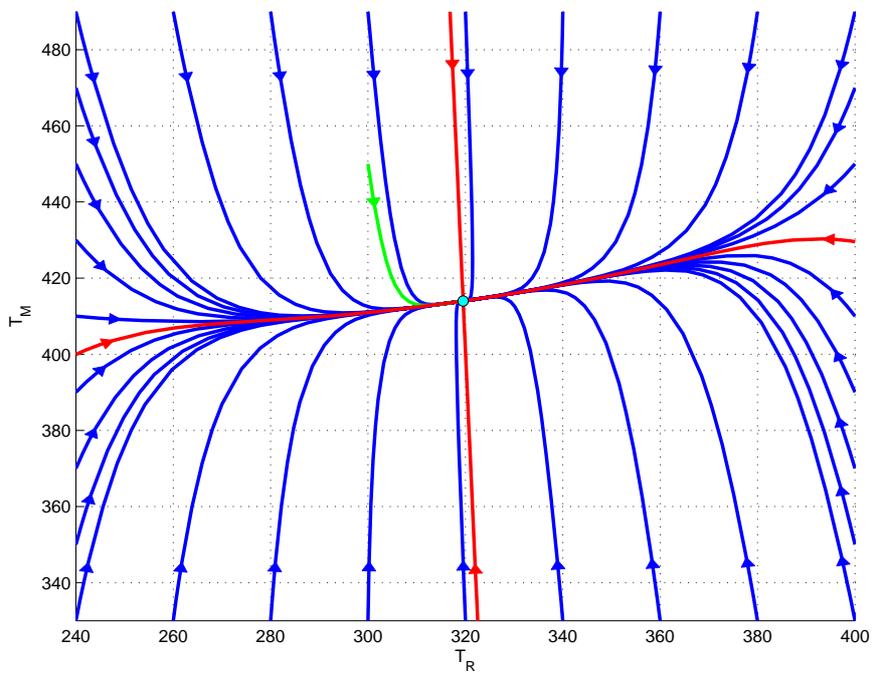


Abbildung 10: Phasenportrait des *nichtlinearen* Systems

```

% +-----+
% |
% |           Projektuebung 3.
% |
% |           Florian Knorn, STK 01
% |
% |           Haupt-Programm
% |
% +-----+

```

```

clc; close all; clear all;
global calc flag init dostep A B; init = 0; A=[]; B=[];
disp('===== PROGRAMM-START =====')

```

```

% +-----+
% | Deklarartion der Konstanten
% +-----+

```

```

% ----- Manipulationsgrößen
V_punkt_Heiz = 5/60;           % m³/s - Volumenstrom des Heizmittels
T_Heiz_in = 450;              % K - Temperatur des einström. Heizmed.
t_end = 50;                   % s - Simulationsdauer
lin = 1;                      % Lin. Modell ber. ? 1 = ja, 0 = nein
plots = 1;                    % Plots anzeigen? 1 = ja, 0 = nein
titles = 1;                   % Titel bei plots? 1 = ja, 0 = nein
dostep = 0;                   % Dyn. Änd. von T_R? 1 = ja, 0 = nein
compare = 1;                  % Lin/Nonlin vergl.? 1 = ja, 0 = nein

```

```

% ----- Reaktor-Kenngrößen
p.T_Rin = 300;                % K
p.V_R = 1;                    % m³
p.Vdot_R = 10/60;            % m³/s
p.rho_R = 866;                % km/m³
p.cp_R = 1717;                % J/kg/K

```

```

% ----- Wärmetauscher-Kenngrößen
p.T_Min = T_Heiz_in;         % K
p.V_M = 0.1;                  % m³
p.Vdot_M = V_punkt_Heiz;     % m³/s
p.rho_M = 996;                % km/m³
p.cp_M = 1620;                % J/kg/K
p.k = [1.345 2.897];         % W/m²/K^2.5
p.A = 3.1;                    % m²

```

```

% ----- Report
disp([sprintf('\n\nSystem-Parameter / Simulations-Parameter:\n'),...
    sprintf(' V.Reak | V.Heiz | T_R_in | T_M_in | t_end |\n'),...
    sprintf(' %6g | %6g | %6g | %6g |',p.Vdot_R*60,...
    V_punkt_Heiz*60,p.T_Rin,T_Heiz_in,t_end),sprintf('\n\nFlags\n'),...
    sprintf(' linear? | plots? | titles? | compare? | step? |\n'),...
    sprintf(' %6g | %6g | %6g | %6g | %6g |\n\n',lin,plots,...
    titles,compare,dostep)]);
disp('===== BEGINN DER BERECHNUGEN =====')

```

```

% +-----+
% | Anfangsbedingungen |
% +-----+

disp('Anfangsbedingungen:'); clr = 'b'; % "normale" Trajektorien blau
v1 = [ 0.983804574840 0.179244410022 ]'; % Eigenvektor 1
v2 = [ -0.0354857155504 0.999370183662 ]'; % Eigenvektor 2

for j = 0 : 9 % verschachtelte for-Schleifen für ABen für das Phasendiagr.
    for k = 0 : 8
        if (j > 0 & j < 8 & k > 0 & k < 8) | (j == 5 & k == 8)
            continue; % Punkte "innerhalb" des Phasendiagr. nicht beachten
        end;
        AB = [240+k*20 330+j*20]; % ansonsten ABen variieren
        if (j == 9 & k == 0) % Plotten des "Standard"-Szenarios
            AB = [300 450]; clr = 'g'; end;
        if (j == 9 & k == 1) % ab hier Plotten der charakteristischen Traj.
            AB = [p.T_Rs+v1(1)*84 p.T_Ms+v1(2)*84]; clr = 'r'; end;
        if (j == 9 & k == 2)
            AB = [p.T_Rs-v1(1)*82 p.T_Ms-v1(2)*82]; end;
        if (j == 9 & k == 3)
            AB = [p.T_Rs+v2(1)*79 p.T_Ms+v2(2)*79]; end;
        if (j == 9 & k == 4)
            AB = [p.T_Rs-v2(1)*85 p.T_Ms-v2(2)*85]; end;
        if (j == 9 & k >= 5)
            break;
        end
        clear t t1 q ql; % Variablen löschen
        disp(sprintf('T_R = %.2f K, T_M = %.2f K',AB(1),AB(2)));

% +-----+
% | Nichtlineares System |
% +-----+
% ----- Lösen
tspan=[0 t_end]; [t,x]=ode15s(@p3_aux_nl,tspan,AB,[],p);
% ----- Rückrechnen
T_R = x(:,1); T_M = x(:,2);
for i=1:length(t)
    q(i) = (p.k(1)+p.k(2)*x(i,1).^1.5).*p.A.*(x(i,2)-x(i,1));
end

% ----- SS berechnen
if init == 0, % nur einmal, anfangs, berechnen
    xs = fsolve(@p3_alg,[350 350],optimset('Display','off'),p);
    p.T_Rs = xs(1); p.T_Ms = xs(2);
    p.qs = (p.k(1)+p.k(2)*x(1)^1.5)*p.A.*(p.T_Ms-p.T_Rs);
end

if lin == 1,
% +-----+
% | Lineares System |
% +-----+
% ----- Lösen
[t1,x1]=ode15s(@p3_aux_lin,tspan,AB,[],p);
% ----- Rückrechnen
T_R1 = x1(:,1); T_M1 = x1(:,2);
for i=1:length(t1)
    ql(i)=(p.k(1)+p.k(2)*x1(i,1).^1.5).*p.A.*(x1(i,2)-x1(i,1));
end
end % if lin

```

```

    if (plots == 1 & k == 0 & j == 9) % standard-Szenario plotten
% -----+-----
% | Graphische Darstellung der Ergebnisse |
% -----+-----
% ----- Temperaturn und Wärmestrom NICHTLINEARES Syst
    figure(1)
    subplot(2,1,1);          plot(t,T_R,'b',t,T_M,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Temperaturen in [K]');
    legend('T_R(t)','T_M(t)',1); grid on; axis tight;
    if titles==1
    title('Temperaturen in Reaktor und Mantel, NICHTLIN. Syst.',...
        'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
    set(subplot(2,1,1),'YTick',[300:25:450],'Layer','top');

    subplot(2,1,2);          plot(t,q./1E3,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Wärmestrom q in [kW]');
    legend('q(t)'); grid on; axis tight;
    if titles==1
    title('Wärmestrom zw. Reaktor und Mantel, NICHTLIN. Syst.',...
        'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;

% ----- Temperaturn und Wärmestrom LINEARES System
    if lin == 1, figure(2)
    subplot(2,1,1);plot(tl,T_Rl,'b',tl,T_Ml,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Temperaturen in [K]');
    legend('T_R(t)','T_M(t)',1); axis tight; grid on;
    if titles==1
    title('Temperaturen in Reaktor und Mantel, LIN. Syst.',...
        'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
    set(subplot(2,1,1),'YTick',[300:25:450],'Layer','top');

    subplot(2,1,2);          plot(tl,ql./1E3,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Wärmestrom q in [kW]');
    legend('q(t)'); grid on; axis tight;
    if titles==1
    title('Wärmestrom zw. Reaktor und Mantel, LIN. Syst.',...
        'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
    end % if lin

% ----- Vergleich LIN.SYS / NICHTLIN.SYS
    if (compare == 1)
    figure(3); subplot(2,1,1);
    plot(t,T_R,'b',t,T_M,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Temperaturen in [K]');
    legend('T_R(t)','T_M(t)',1); grid on; axis tight;
    if titles==1
    title('Vergleich NICHTLIN. (oben) / LIN. Syst. (unten)',...
        'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
    set(subplot(2,1,1),'YTick',[300:25:450],'Layer','top');

    subplot(2,1,2);
    plot(tl,T_Rl,'b',tl,T_Ml,'r','linewidth',2);
    xlabel('Zeit t in [s]'); ylabel('Temperaturen in [K]');
    legend('T_R(t)','T_M(t)',1); axis tight; grid on;
    set(subplot(2,1,2),'YTick',[300:25:450],'Layer','top');
    end % if compare
end % if plots & k = 0 & j = 9

```

```

% ----- Phasendiagramm NICHTLIN.SYS
    if (plots == 1 & dostep == 0), figure(4)
        hold on; xlabel('T_R');ylabel('T_M'); axis([240 400 330 490]);
        plot(T_R,T_M,clr,'linewidth',2); arrow(T_R,T_M,clr,100,12);
        if titles==1,
            title('Phasendiagramm T_R = f(T_M) des NICHTLIN. Syst.',...
                'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
        end

% ----- Phasendiagramm LIN.SYS
    if (plots == 1 & dostep == 0 & lin == 1 & clr ~= 'g'), figure(5)
        hold on; xlabel('T_R');ylabel('T_M'); axis([240 400 330 490]);
        plot(T_Rl,T_Ml,clr,'linewidth',2); arrow(T_Rl,T_Ml,clr,100,12);
        if titles==1,
            title('Phasendiagramm T_R = f(T_M) des LINEAREN Syst.',...
                'fontsize',12,'fontweight','bold'); end;
        end

    init = 1; % 1. lauf komplett, einige rechnungen / plots einsparen!
    end % k's for-Schleife
end % j's for-Schleife
if (plots == 1 & dostep == 0) % Ruhelage im Phasendiagramm NICHTLIN.SYS
    figure(4); plot(p.T_Rs,p.T_Ms,'o','markersize',6,...
        'markeredgecolor','k','markerfacecolor','c'); grid on;
end
if (plots == 1 & dostep == 0 & lin == 1) % Ruhelage im Phasendiagramm LIN.
    figure(5); plot(p.T_Rs,p.T_Ms,'o','markersize',6,...
        'markeredgecolor','k','markerfacecolor','c'); grid on;
end

% +-----+
% | Ausgabe einiger Ergebnisse auf den workspace |
% +-----+
disp('===== ENDE DER BERECHNUGEN =====')
disp([ sprintf('\n\nStationäre Zustände\n T_Rs = %.2f K\n',p.T_Rs) ...
    sprintf(' T_Ms = %.2f K\n',p.T_Ms) ...
    sprintf(' q_s = %.2f kW\n\n',p.qs/1000)]);
if lin == 1
    Dynamikmatrix = A
    Eingangsmatrix = B
end
disp('===== PROGRAMM-ENDE =====')

```

```

% +-----+
% |
% |           Projektuebung 3.
% |
% |           Florian Knorn, STK 01
% |
% |           System-Programm
% |           NICHTLINEARES MODELL
% |
% +-----+
function dxdt=p3_aux_nl(t,x,p); global dostep;

% +-----+
% | Zustands- und Eingangsgrößen-Vektoren des nichtlin. Modells |
% +-----+
if (t > 20 & dostep == 1)
    T_Rin = p.T_Rin;
    Vdot_R = p.Vdot_R;
    T_Min = p.T_Min;
    Vdot_M = 0/60;
else
    T_Rin = p.T_Rin;
    Vdot_R = p.Vdot_R;
    T_Min = p.T_Min;
    Vdot_M = p.Vdot_M;
end

T_R = x(1);          T_M = x(2);

% +-----+
% | Nebenrechnung: Wärmeaustauschstrom |
% +-----+
q = ( p.k(1) + p.k(2)*T_R^1.5 ) * p.A * (T_M - T_R);

% +-----+
% | Nichtlineare Differentialgleichungen |
% +-----+
dT_R = Vdot_R / p.V_R * (T_Rin - T_R) + q/(p.V_R*p.rho_R*p.cp_R);
dT_M = Vdot_M / p.V_M * (T_Min - T_M) - q/(p.V_M*p.rho_M*p.cp_M);

dxdt=[dT_R ;
      dT_M ];

#####

% +-----+
% |
% |           Projektuebung 3.
% |
% |           Florian Knorn, STK 01
% |
% |           fsolve-Programm
% |
% +-----+
function F = p3_alg(x,p)

q = (p.k(1)+p.k(2)*x(1)^1.5)*p.A*(x(2)-x(1));

F = [ p.Vdot_R/p.V_R * (p.T_Rin-x(1)) + q / (p.V_R*p.rho_R*p.cp_R);
      p.Vdot_M/p.V_M * (p.T_Min-x(2)) - q / (p.V_M*p.rho_M*p.cp_M) ];

```

```

% +-----+
% |
% |           Projektuebung 3.
% |
% |           Florian Knorn, STK 01
% |
% |           System-Programm
% |           LINEARES MODELL
% |
% +-----+
function dxdt=p3_aux_lin(t,x,p); global init dostep A B;

% +-----+
% | Zustands- und Eingangsgrößen-Vektoren des lin. Modells |
% +-----+
if (t > 20 & dostep == 1)
    T_Rin = p.T_Rin;
    Vdot_R = p.Vdot_R;
    T_Min = p.T_Min;
    Vdot_M = 0/60;
else
    T_Rin = p.T_Rin;
    Vdot_R = p.Vdot_R;
    T_Min = p.T_Min;
    Vdot_M = p.Vdot_M;
end

x = x - [ p.T_Rs ; p.T_Ms ];
u = [T_Rin-p.T_Rin , Vdot_R-p.Vdot_R , T_Min-p.T_Min , Vdot_M-p.Vdot_M]';

% +-----+
% | Dynamik- und Eingangsmatrix |
% +-----+
if init == 0 % verhindert, daß jedes mal A und B neu berechnet werden
    A = []; % erstellen von A
    A(1,1) = -p.Vdot_R/p.V_R + (4.3455*p.T_Rs^.5*(p.T_Ms-p.T_Rs) - ...
              (1.345+2.897*p.T_Rs^1.5))*p.A/p.V_R/p.rho_R/p.cp_R;

    A(1,2) = (1.345+2.897*p.T_Rs^1.5)*p.A/p.V_R/p.rho_R/p.cp_R;

    A(2,1) = (-4.3455*p.T_Rs^.5*(p.T_Ms-p.T_Rs) + ...
              (1.345+2.897*p.T_Rs^1.5))*p.A/p.V_M/p.rho_M/p.cp_M;

    A(2,2) = -p.Vdot_M/p.V_M - ...
              (1.345+2.897*p.T_Rs^1.5)*p.A/p.V_M/p.rho_M/p.cp_M;

    B = ...
        [p.Vdot_R/p.V_R , (p.T_Rin-p.T_Rs)/p.V_R , 0 , 0 ;
         0 , 0 , p.Vdot_M/p.V_M , (p.T_Min-p.T_Ms)/p.V_M];
end

% +-----+
% | Lineare Differentialgleichungen |
% +-----+
dxdt = A*x + B*u;

```