

6.6 Frequenzgang

Neben der Übertragungsfunktion $G(s)$ zur Beschreibung der Signalübertragung in einem linearen Übertragungsglied im Bildbereich wird in verschiedenen Teilgebieten der Elektrotechnik noch eine **andere „Kennfunktion“** benutzt, der sog.

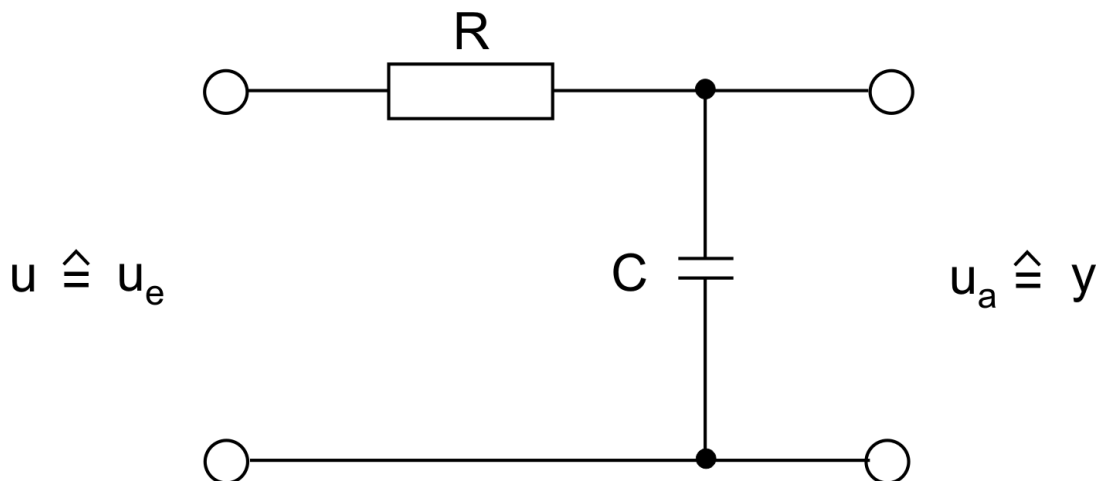
Frequenzgang.

Formal mathematisch ist er definiert als Übertragungsfunktion $G(s)$ auf der imaginären Achse der s – Ebene

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega). \quad (6.70)$$

Man hat nur in der Übertragungsfunktion $G(s)$ die komplexe Variable $s = \sigma + j\omega$ durch die rein imaginäre Variable $s = j\omega$ zu ersetzen.

Beispiel:



Dgl: $\frac{RC}{T} \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$

$$\curvearrowright G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

$$\curvearrowright G(j\omega) = \frac{1}{T * (j\omega) + 1}$$

$$= \frac{1}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{-Tj\omega + 1}{-Tj\omega + 1}$$

$$= \frac{-Tj\omega + 1}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{T^2\omega^2 + 1}}_{\text{Re}\{G(j\omega)\}} - j \underbrace{\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}}_{\text{Im}\{G(j\omega)\}}$$

Wie man aus diesem Beispiel u. a. sieht, stellt **G(j ω)** eine komplexe Funktion mit **der Variablen ω** dar. Wie gezeigt, kann sie in der üblichen Weise in **Real- und Imaginärteil** zerlegt werden:

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \frac{1}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = -\frac{T\omega}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Natürlich kann auch die Darstellung durch **Betrag und Argument** gewählt werden:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= \sqrt{\operatorname{Re}^2\{G(j\omega)\} + \operatorname{Im}^2\{G(j\omega)\}} & (6.71) \\ &= \sqrt{\frac{1}{(T^2\omega^2 + 1)^2} + \frac{T^2\omega^2}{(T^2\omega^2 + 1)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T^2\omega^2 + 1}} \\ |G(j\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg G(j\omega) &= \underbrace{|G(j\omega)|}_{\text{Betrag}} = \operatorname{arc\,tan} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} & (6.72) \\ &= \operatorname{arc\,tan} \frac{-T\omega}{1} \\ &= -\operatorname{arc\,tan} T\omega. \end{aligned}$$

Für die weiter unten folgende physikalische Deutung des Frequenzganges ist **diese Darstellung durch Betrag und Argument nützlicher**. Es sei bemerkt, daß man diese Darstellung des Frequenzganges aus seiner Gleichung i. a. schneller erhält, wenn man nach dem folgenden, für das Beispiel illustriertem Muster vorgeht:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + jT\omega} = \frac{1}{Z_1} & \text{d. h. komplexe Zahl} \\ & & Z_1 = 1 + jT\omega \\ |G(j\omega)| &= \frac{1}{|Z_1|} = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} \\ \arg G(j\omega) &= \arg 1 - \arg Z_1 \\ &= 0 - \operatorname{arc\,tan} \frac{T\omega}{1} = -\operatorname{arc\,tan} T\omega. \end{aligned}$$

Wenn man nun die Variable ω z. B. von 0 bis ∞ laufen lässt, kann man die komplexe Funktion $G(j\omega)$ in der komplexen **Gauß'schen Zahlenebene bildlich darstellen**. Dazu hat man entweder punktweise

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \quad , \quad \operatorname{Im}\{G(j\omega)\}$$

oder

$$|G(j\omega)| \quad , \quad \arg G(j\omega)$$

für geeignet gewählte und ausreichend viele Werte ω auszurechnen (\rightarrow Wertetabelle) und die entsprechenden Punkte in der Gauß'schen Zahlenebene einzutragen. Jeder dieser Punkte ist durch den zugehörigen ω - Wert zu kennzeichnen. Die Verbindung dieser Punkte liefert die sog. **Ortskurve des Frequenzganges**. Für das vorliegende **Beispiel** erhält man z. B. einen Halbkreis im IV. Quadranten:

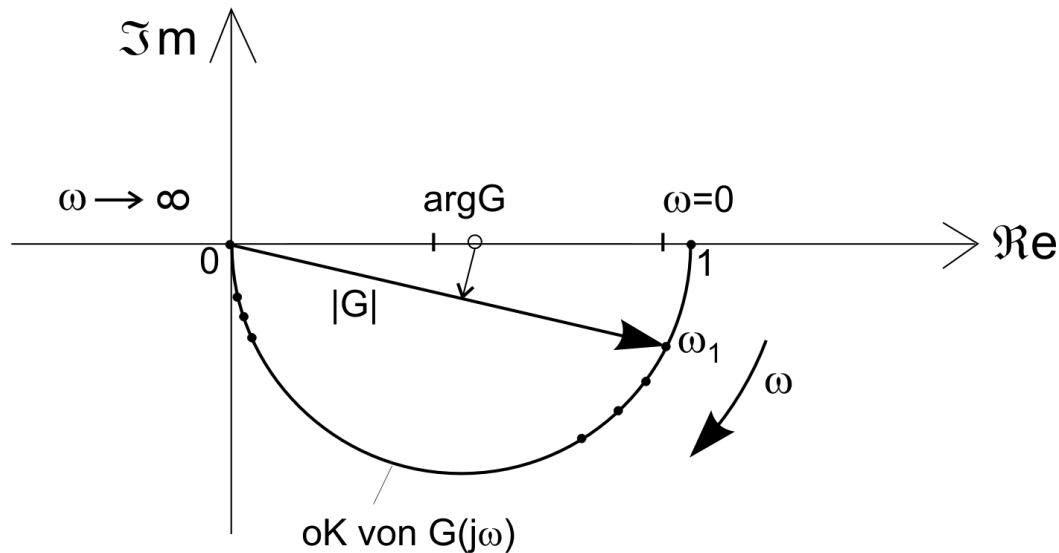


Bild 6.8: Ortskurve des Frequenzganges

Erinnern wir uns an die formale Einführung des Frequenzganges mit (6.70)

$$G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega),$$

so kann man dieses Ergebnis **deuten als die Abbildung** der Punkte $s = j\omega$ ($0 \leq \omega < \infty$) der s - Ebene – das ist die obere Hälfte der imaginären Achse der s - Ebene – mittels der (komplexen) Funktion oder Abbildvorschrift $G(s)$ in eine andere komplexe $G(j\omega)$ - Ebene:

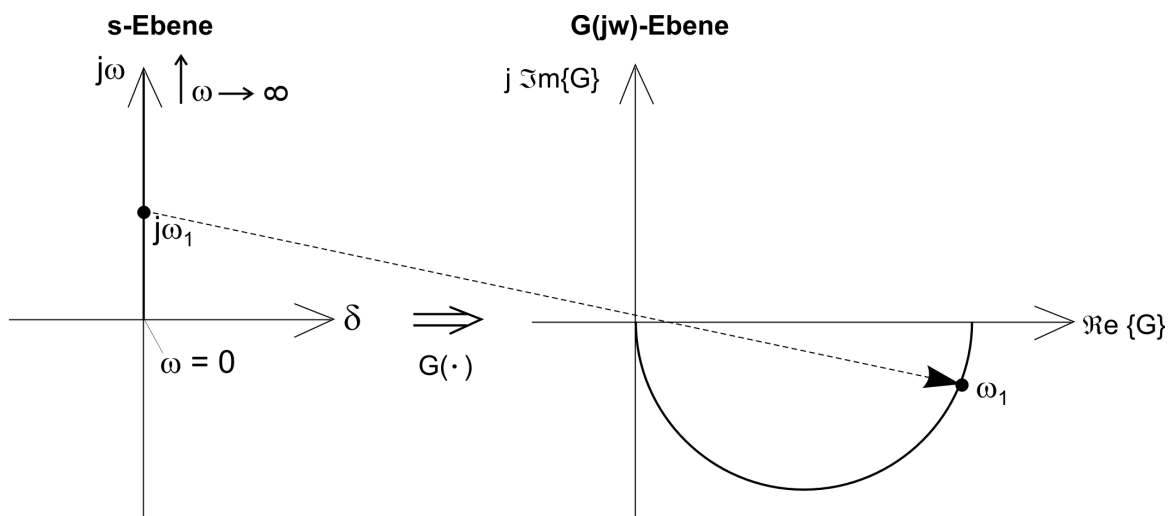


Bild 6.9: Zur Deutung der Abbildvorschrift (6.70)

Zweifellos ist bis jetzt nicht so recht einzusehen, weshalb dieser als Spezialfall für $s = j\omega$ aus der Übertragungsfunktion $G(s)$ hervorgehende Frequenzgang eines linearen Systems (Übertragungsgliedes) eingeführt wird. Dies wird gerechtfertigt durch die **große messtechnische Bedeutung des Frequenzganges** und die **hohe Anschaulichkeit**, die er in viele Seiten der linearen Signal- und Systemtheorie hineinzubringen vermag.

Es ist nämlich noch ein **ganz anderer anschaulicher Zugang zum Frequenzgang** $G(j\omega)$ eines linearen Systems möglich, der darauf beruht, dass der Frequenzgang die stationäre Antwort des Übertragungsgliedes bei Aufschaltung harmonischer Schwingungen beschreibt.

Schaltet man **am Eingang** eines linearen zeitinvarianten Übertragungsgliedes ein **harmonisches Eingangssignal**

$$u(t) = \hat{U} \sin \omega t = \text{Im} \{ \hat{U} e^{j\omega t} \} \quad (6.73)$$

oder

$$u(t) = \hat{U} \cos \omega t = \text{Re} \{ \hat{U} e^{j\omega t} \} \quad (6.74)$$

auf, so stellt sich am **Ausgang** nach einem gewissen Übergangsvorgang wieder eine **stationäre harmonische Schwingung gleicher Frequenz ω** ein, deren **Amplitude und Phasenlage** aber gegenüber der erregenden Eingangsschwingung i. a. **verändert** sind:

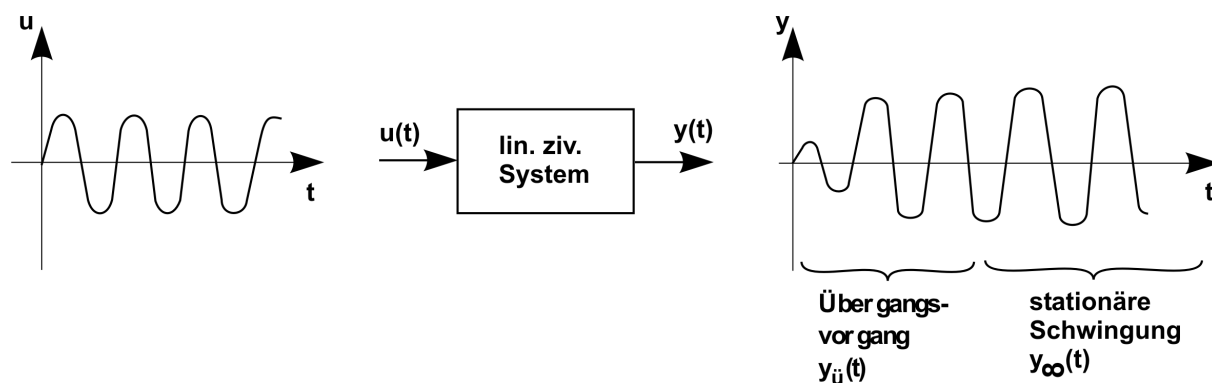


Bild 6.10: „Sinusantwort“ eines linearen zeitinvarianten Systems

Im stationären Zustand reagiert also ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied auf die harmonische Eingangsschwingung

$$u(t) = \hat{U} \sin \omega t$$

mit

$$y_{\infty}(t) = \hat{Y} \sin(\omega t + j) . \quad (6.75)$$

Wenn man dieses Experiment mit unterschiedlicher Frequenz ω durchführt, so stellt man fest, daß sich die **Amplitude \hat{Y}** und die **Phasenlage j** der stationären Antwortschwingung **mit der Frequenz ω ändern**.

Gut bekannt und sehr markant ist diese Tatsache, aus Beobachtungen von Resonanzerscheinungen bei schwingungsfähigen Systemen, z.B. RLC – Netzwerken, Feder – Masse – Schwingern usw. Bei Erregung solcher Systeme mit harmonischen Schwingungen treten in der Nähe der Resonanzfrequenz starke Amplitudenüberhöhungen \hat{Y} bzw. große Amplitudenverhältnisse

$$\frac{\hat{Y}}{\hat{U}}$$

und deutliche Phasendrehungen der erzwungenen stationären Ausgangsschwingung gegenüber der erregenden Schwingung auf.

Für eine gezielte Ermittlung der Frequenzabhängigkeiten des Amplitudenverhältnisses und der relativen Phasenlage benötigt man folgende **Messanordnung**:

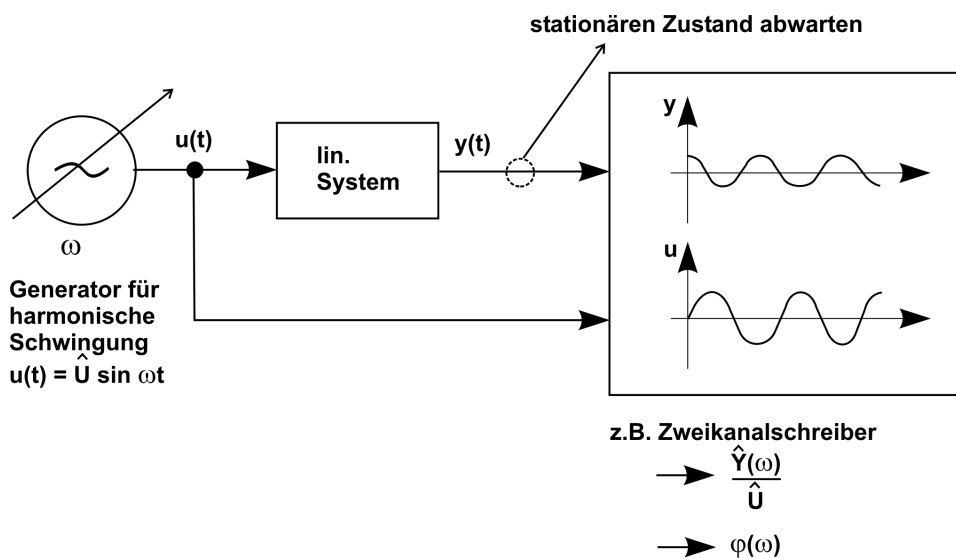


Bild 6.11: Zur messtechnischen Ermittlung des Frequenzganges

Das auf diese Weise **experimentell** ermittelbare

frequenzabhängige Amplitudenverhältnis $\frac{\hat{Y}(\omega)}{\hat{U}}$

und die

frequenzabhängige Phasendrehung $j(\omega)$

hängen nun mit dem oben mathematisch eingeführten Frequenzgang $G(j\omega)$ wie folgt zusammen:

$$\frac{\hat{Y}(\omega)}{\hat{U}} = |G(j\omega)| \quad \text{„Amplitudengang“} \quad (6.76)$$

$$\mathbf{j}(\omega) = \arg G(j\omega). \quad \text{„Phasengang“} \quad (6.77)$$

Damit erhält der Frequenzgang $G(j\omega)$ eine technische Interpretation und anschauliche Erklärung. Auf diese Weise ist es möglich, die oben als bildliche Darstellung des Frequenzganges eingeführte **Ortskurve punktwise messtechnisch zu ermitteln**: Für einen bestimmten Frequenzwert ω ist die Länge des Zeigers (also der Betrag $|G(j\omega)|$) durch das für diese Frequenz gemessene Amplitudenverhältnis bestimmt, und der Winkel des Zeigers zur positiven reellen Achse (also das Argument $\arg G(j\omega)$) entspricht der für diese Frequenz gemessenen relativen, Phasendrehung der stationären Ausgangsschwingung gegenüber der Eingangsschwingung:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \frac{\hat{Y}(\omega)}{\hat{U}} e^{j \mathbf{j}(\omega)}. \quad (6.78)$$

Mit diesem physikalischen Verständnis des Frequenzganges, das sich aus dem Übertragungsverhalten linearer Systeme für harmonische Signale im eingeschwungenen (stationären) Zustand ergibt, lassen sich nun weitere nützliche Zusammenhänge mit den anderen Formen der mathematischen Beschreibung linearer zeitinvarianter Systeme herstellen.

Zunächst aber sollen die Sinusantwort (6.75) eines linearen zeitinvarianten Systems mit gebrochener rationaler Übertragungsfunktion $G(s)$ und die Zusammenhänge (6.76), (6.77), (6.78) mit dem Frequenzgang auf rechnerischem Weg ermittelt werden. (Man vergleiche hierzu auch die in 6.2 im Unterpunkt 3) durchgeführten Berechnungen der Sinusantwort für ein Beispielsystem 2. Ordnung mit Hilfe der Übertragungsfunktion.)

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied habe die gebrochene rationale Übertragungsfunktion $G(s)$. Dann gilt für beliebige korrespondierende Ein- und Ausgangssignale die Gleichung (6.11):

$$Y(s) = G(s) * U(s).$$

Als Eingangssignal wird eine Sinusschwingung aufgeschaltet ($\hat{U} = U_0 = \text{konst.}$)

$$u(t) = \hat{U} \sin \omega t \quad \circ - \bullet \quad U(s) = \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}, \quad (6.79)$$

so dass im Bildbereich für das herauskommende Ausgangssignal gilt

$$Y(s) = G(s) * \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (6.80)$$

Die Rücktransformation in den Zeitbereich nehmen wir über die Partialbruchentwicklung von $Y(s)$ vor. Nehmen wir dazu o. E. d. A. an, dass $G(s)$ sämtlich verschiedene reelle Pole besitzt, so lautet der Ansatz dafür:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{r_1}{s - \mathbf{a}_1} + \frac{r_2}{s - \mathbf{a}_2} + \dots + \frac{r_n}{s - \mathbf{a}_w}}_{n \text{ Pole } \alpha_i \text{ von } G(s),} + \underbrace{\frac{r}{s - j\omega} + \frac{\bar{r}}{s + j\omega}}_{\text{k.k.P.P. } \pm j\omega \text{ von } U(s),} \quad (6.81)$$

korrespondiert mit $y_u(t)$. Korrespondiert mit $y_\infty(t)$.

$$y(t) = r_1 e^{\mathbf{a}_1 t} + r_2 e^{\mathbf{a}_2 t} + \dots + r_n e^{\mathbf{a}_n t} + \text{"Schwingung"}$$

Wenn alle Pole α_i von $G(s)$ in der linken Hälfte der komplexen s – Ebene liegen, wie das für sog. stabile Übertragungsglieder der Fall ist, so verschwinden für große Zeiten ($t \rightarrow \infty$) die ersten n Teilvorgänge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r_i e^{\mathbf{a}_i t} \rightarrow 0, \quad \mathbf{Re}\{\mathbf{a}_i\} < 0,$$

so dass als stationäre Antwort nur die Schwingung

$$y_\infty(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{r}{s - j\omega} + \frac{\bar{r}}{s + j\omega} \right\} \quad (6.82)$$

auftritt. Die beiden Partialbruchkoeffizienten r, \bar{r} sind wie die Pole $j\omega, -j\omega$ konjugiert komplex zueinander und können nach 5.3.2. wie folgt berechnet werden:

$$r = \left[(s - j\omega) * G(s) \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=j\omega}$$

$$r = \left[G(s) \frac{U_0 \omega}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega}$$

$$r = \frac{U_0}{2j} G(j\omega) = -j \frac{U_0}{2} G(j\omega),$$

$$\bar{r} = \left[(s + j\omega) * G(s) \frac{U_0 \omega}{s^2 + \omega^2} \right]_{s=-j\omega}$$

$$\bar{r} = \left[G(s) \frac{U_0 \omega}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega}$$

$$\bar{r} = -\frac{U_0}{2j} G(-j\omega) = j \frac{U_0}{2} G(-j\omega).$$

~> Darstellung durch Betrag und Argument:

$$|r| = \frac{U_0}{2} * |G(j\omega)|$$

$$\mathbf{arg} r = -90^\circ + \mathbf{arg} G(j\omega) = -90^\circ + \mathbf{j}$$

$$|\bar{r}| = \frac{U_0}{2} * |G(-j\omega)| = \frac{U_0}{2} * |G(j\omega)| = |r|$$

$$\mathbf{arg} \bar{r} = 90^\circ + \mathbf{arg} G(-j\omega) = 90^\circ - \mathbf{j} = -\mathbf{arg} r.$$

Damit folgt aus (6.82)

$$y_{\infty}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{U_0}{2} |G| e^{j(j-90)}}{s - j\omega} + \frac{\frac{U_0}{2} |G| e^{-j(j-90)}}{s + j\omega} \right\}$$

$$= \frac{U_0}{2} |G(j\omega)| \left(e^{j(j-90)} e^{j\omega t} + e^{-j(j-90)} e^{-j\omega t} \right)$$

Mit der Euler – Beziehung ist das eine Cos – Schwingung

$$y_{\infty}(t) = U_0 * |G(j\omega)| \cos(\omega t + \mathbf{j} - 90)$$

bzw.

$$y_{\infty}(t) = U_0 * |G(j\omega)| \sin(\omega t + \mathbf{j}). \quad (6.83)$$



Die stationäre Antwort (6.83) auf die Erregung mit

$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

ist wieder eine Sinusschwingung mit der gleichen Frequenz ω , der Amplitude

$$\hat{Y} = U_0 * |G(j\omega)|$$

und der Phasenverschiebung

$$\mathbf{j} = \arg G(j\omega).$$

Damit sind (6.76) und (6.77) rechnerisch bestätigt.